

**BANCO CENTRAL DO BRASIL – BACEN**  
DEPARTAMENTO DE GESTÃO DE RECURSOS HUMANOS  
Concurso Público – Editais n.ºs 1 e 3/2000 – A/BACEN  
CARGO: ANALISTA / ÁREA 2 – PESQUISA EM ECONOMIA E FINANÇAS

- Nas questões de 1 a 50, marque, de acordo com o comando de cada uma delas: itens CERTOS na coluna C; itens ERRADOS na coluna E.
- Use a Folha de Rascunho para as devidas marcações e, posteriormente, a **Folha de Respostas**.

**LÍNGUA INGLESA**

**Text LI-I – questions 1 to 4**

**Monetary rules**

The question of whether the Federal Reserve Board should use rules in the conduct of monetary policy is almost as old as the Fed itself. For a brief time in the Fed's history it used a policy-making rule based on monetary aggregates, and today many are suggesting that it used a rule based on the federal funds rate. Other countries have used policy-making rules that are based on explicit inflation targets. While at this moment the Fed is an institution where members vote on monetary policy using their own best judgement, the issues illustrated in discussing the question of rules are still interesting and controversial.

There are several types of policy-making rules. The simplest form is an unconditional rule, such as having the monetary authorities raise the money supply  $x$  percent per year, come what may. An alternative approach would base a rule on some target objective, such as stable prices, and have monetary authorities reduce the inflation rate to some specified amount, however the authorities choose to do that. An intermediate approach might be called a feedback rule. Under this approach policy objectives, or targets, might be specified in the rule and the authorities would respond in a regular way to deviations between actual values and the target levels of these variables.

Remarks by governor E. M. Gramlich on 24th Annual conference of the eastern economic association. New York, 2/27/98 (with adaptations).

**QUESTÃO 1**

As presented in text LI-I, evaluate the items below.

- 1 The question whether rules should be used to lead the monetary policy is as old as the Fed itself.
- 2 Fed stands for Federal Reserve Board.
- 3 Monetary aggregates once used to be a basis for a policy-making rule adopted by the Fed.
- 4 The federal funds rate rule-based is an up-to-date suggestion.
- 5 A lot of people are now suggesting another policy-making rule.

**QUESTÃO 2**

As stated in text LI-I, judge the items below.

- 1 Monetary aggregates and federal funds rate are two options that policy-making rules can be based on.
- 2 There are at least three options for policy-making rules in the first paragraph.
- 3 The Fed has long been using the system of voting on monetary policy.
- 4 The question of establishing rules for policy-making through voting is a once-and-for-all mechanism.
- 5 Fed members' judgement is the best strategy to settle monetary policy.

**QUESTÃO 3**

As shown in text LI-I, judge the items that follow.

- 1 There are various types of policy-making rules.
- 2 Nowadays the Fed and other countries are adopting the same policy-making rules, based on explicit inflation targets.
- 3 In the simplest form of policy-making rules, authorities might raise the money stock  $x$  percent per year.
- 4 The less complex is also an unrestricted form to make policy rules.
- 5 Stable prices is a target objective.

**QUESTÃO 4**

Based on what text LI-I expresses, evaluate the items below.

- 1 Monetary authorities haven't yet reached a consensus as far as policy-making rules are concerned.
- 2 Feedback rule is an example of an unconditional rule.
- 3 In an intermediate approach, targets ought to be specified in the rule.
- 4 According to a feedback rule, the authorities would regularly react to current deviation.
- 5 Under a feedback approach there should not to be deviations.

**A target rule: inflation targeting**

- A well-known approach, used in a number of industrialized countries (Canada, the United Kingdom, New Zealand, Sweden, Australia, Finland, Spain and Israel, to name a few) is known as inflation targeting. Rather than having some monetary quantity under the control of the authorities advance  $x$  percent per year, the idea of inflation targeting is to move right to the ultimate goal of monetary policy, stable prices – overall price levels should grow no more than  $y$  percent per year. Rather than having monetary authorities operate in terms of a simple rule, the authorities are simply told to get inflation down, one way or another. In this sense, inflation targeting is a very different type of rule. It gives very great discretion to the monetary authorities to pursue one objective, and no ability to pursue any other objective. While inflation targeting would seem to force central banks to become very specific about their policies, in fact the actual inflation targeting strategies have been more flexible. They have usually required the central bank to target between one and three percent inflation. They have also been defined in terms of some version of the underlying rate of inflation – the overall inflation rate less food and energy prices, the impact of exchange rates, government taxes, and perhaps other clearly exogenous prices. Moreover, the real world inflation targets that have been instituted usually give the central bank an out, if this quarter it wants to worry about exchange rates, output gaps, or other economic goals.

Ben Bernanke and Frederic Mishkin, 1997 (with adaptations).

**QUESTÃO 5**

In accordance with text LI-II, inflation targeting

- ① is used in some industrialized nations in several parts of the world.
- ② presupposes to have some monetary amount controlled by the authorities advance  $x$  per cent per year.
- ③ envisages to get stable prices.
- ④ establishes that prices in general should necessarily grow up to  $y$  percent per year.
- ⑤ gets inflation down whatever happens.

**QUESTÃO 6**

In text LI-II, the sentence “the authorities are simply told to get inflation down, one way or another” (l.9-10) can be correctly replaced by

- ① some people simply tell the authorities to get inflation down whatever happens.
- ② to get inflation down, come what may, is simply told to the authorities.
- ③ it is simply said to the authorities to get inflation down under any circumstances.
- ④ the authorities simply get inflation down, in any case.
- ⑤ to get inflation down anyway, just say that to the authorities.

**QUESTÃO 7**

According to text LI-II, judge the items below.

- ① Central banks are forced to be specific about the real inflation targeting strategies.
- ② Actual strategies have seldom required central banks to aim at up to three percent inflation.
- ③ Present-day strategies have been set by the difference between overall inflation rate and food and energy prices.
- ④ Exogenous prices may also be taken into account by the actual inflation strategies.
- ⑤ Inflation targeting can be associated to a target rule.

**QUESTÃO 8**

The quotation: “the real world inflation targets that have been instituted usually give the central bank an out” (l.22-23) can be correctly replaced by

- ① the actual world inflation targets which have been instituted generally give the central bank an out.
- ② the real world inflation targets that have been instituted rarely give the central bank an out.
- ③ the instituted real world inflation targets commonly give the central bank an out.
- ④ the world real inflation that had been instituted customarily gave the central bank an out.
- ⑤ the central bank is often given an out by the instituted real world inflation targets.

**Text LI-III – questions 9 and 10**

In the early days, before most countries had central banks, countries operated under the gold standard, which entailed its own set of rules. The world supply of money was determined by the usable gold supply. New gold discoveries would lead to monetary expansions in recipient countries, which would then experience rises in prices and output. Contractions in the supply of usable gold would require contractions in prices and output. If a country on its own over-inflated demand, say by fiscal policy, its demand would spill over to foreigners and its gold would flow out. While the gold standard was in this sense self-regulating, it was not a perfect system. Monetary policy was not set consciously in terms of the economic needs of the country, but by the world gold market. The world gold stock would fluctuate in line with international discoveries, while the stock in particular countries reflected trade flows. There was no automatic provision for money or liquidity to grow in line with the normal production levels in the economy. John Taylor (1998) has shown that this regime was responsible for large fluctuations in real output, much less stability in real output than has been achieved in the post gold standard era. In the gold standard period of 1890-1905, for example, the US economy suffered five major recessions.

Remarks by governor E. M. Gramlich on 24th Annual conference of the eastern economic association. New York, 2/27/98 (with adaptations).

**QUESTÃO 9**

As asserted in text LI-III, judge the items below.

- ① Gold standard was previously used by different countries.
- ② Countries which operated under the gold standard used to set their own rules.
- ③ The available world gold supply was determined by the world stock of the money.
- ④ In recipient countries, new gold discoveries would ultimately lead to price and output rises.
- ⑤ An over-inflated demand could cause a country to have its gold flow out.

**QUESTÃO 10**

As found in text LI-III, evaluate the items that follow.

- ① The gold standard was a perfectly self-regulating monetary mechanism.
- ② The global gold market was determined by the monetary policy.
- ③ The after gold standard times have shown more stability.
- ④ For the last fifteen years the US economy had undergone exactly five recessions.
- ⑤ The post gold standard era has achieved a lot more stability in real output.

## CONHECIMENTOS ESPECÍFICOS

### QUESTÃO 11

Com base nos modelos de ataques especulativos, julgue os itens abaixo.

- ① Do ponto de vista teórico, uma crítica importante aos modelos de ataque especulativo de primeira geração consiste na assimetria no tratamento dos comportamentos público e privado.
- ② Do ponto de vista empírico, uma crítica importante aos modelos de ataque especulativo de primeira geração é a ênfase à falta de recursos para defender a taxa de câmbio como força última, levando ao colapso o regime cambial.
- ③ De acordo com os modelos de crise de balanço de pagamentos com equilíbrios múltiplos, os ataques especulativos são tipicamente precedidos por um período de crescimento nos diferenciais de juros domésticos externos.
- ④ Ataques especulativos desencadeados por *manchas solares* (*sunspots*) são totalmente divorciados dos fundamentos.
- ⑤ O modelo de ataque especulativo de Krugman é um exemplo típico de modelo de *mancha solar*.

### QUESTÃO 12

Julgue os itens a seguir.

- ① O argumento a favor de regras com *feedback* assume que a economia pode ser descrita como um conjunto de equações a diferença estocásticas que têm coeficientes que não mudam a cada alteração nas regras com *feedback* que a autoridade poderia usar.
- ② A validade do teorema da neutralidade depende da especificação do conjunto de informações.
- ③ Com expectativas racionais, se a autoridade monetária usar a taxa de juros como instrumento, a política monetária será ineficaz e a taxa de inflação será determinada pela taxa de crescimento do estoque de moeda.
- ④ Por causa da inabilidade institucional de algumas firmas fazerem pleno uso da informação disponível, a política monetária pode afetar sistematicamente o produto real no curto prazo.
- ⑤ A questão **política ativista versus política não-ativista** é a mesma que a questão **regras versus discricção**.

### QUESTÃO 13

Considere um típico modelo de inconsistência temporal e política monetária em que a função de perda, minimizada por um banco central, é dada por  $L = \pi^2 + \chi(y - k)^2$ , em que  $\pi$  e  $y$  são, respectivamente, a taxa de inflação e o produto, e  $\chi$  e  $k$  são constantes positivas. Nesse modelo, o banco central escolhe a taxa de inflação  $\pi$  e o produto é determinado pela curva  $y = \pi - \pi^e$ , em que  $\pi^e$  é a inflação esperada, escolhida por um *continuum* de agentes privados com expectativas racionais. Com base nesse modelo, julgue os itens que se seguem.

- ① Na presença de compromisso (*commitment*), não há viés inflacionário.
- ② O conceito de inconsistência temporal é equivalente, na linguagem da teoria dos jogos, ao conceito de perfeição (*perfection*), isto é, um equilíbrio será consistente temporalmente se for subjogo perfeito ou bayesiano perfeito, se for o caso.
- ③ Um banco central "conservador", representado por um  $\chi$  alto, reduz o viés inflacionário.
- ④ Contratos tais como um sistema de metas inflacionárias em que o banco central seja punido se elevar a inflação acima de certo limiar podem reduzir o viés inflacionário.
- ⑤ Reputação, isto é, equilíbrios em que os agentes privados utilizem estratégias gatilho (*trigger strategies*), em um jogo repetido no qual um banco central tenha como função de perda  $U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t L(\pi_t, y_t)$ , em que  $\beta \in (0, 1)$  é a taxa de desconto intertemporal e  $t$  é um índice de tempo, pode reduzir o viés inflacionário.

### QUESTÃO 14

Considere um típico modelo de gerações superpostas (OLG) com duas gerações: os jovens trabalham uma unidade de tempo e poupam parte de seu salário para o período seguinte; essa poupança rende juros e é consumida quando estes agentes se tornam velhos; a função de utilidade de um agente da geração,  $t$ , é dada por  $U^t = \ln(c_t^j) + \beta \ln(c_{t+1}^v)$ , em que  $\ln$  representa o logaritmo neperiano,  $c_t^j$  e  $c_{t+1}^v$  são os consumos quando este agente é jovem e quando é velho, respectivamente; a função de produção é  $f(k_t) = Ak_t^\alpha$ , na qual  $k_t$  é o estoque de capital *per capita*; não há crescimento populacional, e a taxa de depreciação do capital é  $\delta$ .

Com base nesse modelo, julgue os itens seguintes.

- ① Essa é uma típica economia Arrow-Debreu, aplicando-se, portanto, os teoremas de bem-estar.
- ② Essa economia apresenta dois estados estacionários, mas somente aquele com estoque de capital positivo é estável.
- ③ A poupança dos jovens independe da taxa de juros porque as preferências são logarítmicas.
- ④ A poupança dos velhos é negativa e igual, em módulo, a  $(1 - \delta)k_t$ .
- ⑤ É possível que essa economia seja dinamicamente ineficiente.

**QUESTÃO 15**

No que diz respeito aos modelos de *manchas solares*, julgue os seguintes itens.

- ① Modelos que apresentam *manchas solares* também têm implicações em termos de política econômica.
- ② Se a dimensão da superfície de equilíbrio estável for inferior ao número de condições iniciais, a economia apresentará *manchas solares*.
- ③ Modelos de ciclos reais com moeda, tais como modelos com restrição do tipo *cash-in-advance*, não são economias do tipo Arrow-Debreu e, portanto, podem apresentar *manchas solares*.
- ④ Modelos com comportamento dinâmico caótico são exemplos típicos de modelos de *manchas solares*.
- ⑤ Modelos de crescimento com armadilha de pobreza são exemplos típicos de modelos de *manchas solares*.

**QUESTÃO 16**

Julgue os seguintes itens, acerca do modelo de crescimento endógeno conhecido como Uzawa-Lucas.

- ① Quando há externalidades na formação de capital humano, a taxa de crescimento ótima (solução do planejador social) é inferior à taxa de crescimento do equilíbrio competitivo.
- ② Se não houver externalidades na formação de capital humano, o PIB *per capita* será constante no estado estacionário.
- ③ Assim como o modelo AK (Rebelo, 1991), o modelo Uzawa-Lucas prevê que o PIB dos países deve convergir.
- ④ Assim como outros modelos de crescimento endógeno, o modelo Uzawa-Lucas concentra-se na tendência de longo prazo de redução do desemprego como determinante principal do crescimento econômico.
- ⑤ No modelo de Uzawa-Lucas, assim como na maioria dos modelos de crescimento endógeno, o resíduo de Solow gera convergência do tipo beta.

**QUESTÃO 17**

A respeito da pesquisa de ciclos reais de negócios aplicada à economia dos Estados Unidos da América (EUA), julgue os itens seguintes.

- ① Flutuações no nível de capital são importantes para explicar movimentos de alta frequência no produto.
- ② Nas frequências dos ciclos reais, a correlação entre o consumo e o produto é positiva, e o desvio-padrão do consumo é maior que o do produto.
- ③ O filtro de Hodrick-Prescott tem a finalidade de eliminar distorções resultantes da sazonalidade das séries.
- ④ Calibração é um processo de determinação de parâmetros, embasado em observações acerca do comportamento de longo prazo da economia.
- ⑤ Em modelos de ciclos reais típicos, choques de produtividade positivos elevam o salário, o que, por sua vez, aumenta o nível de emprego.

**QUESTÃO 18**

Com base em um modelo de busca intertemporal de trabalho no qual nem desistência nem demissão sejam permitidas, julgue os itens abaixo.

- ① A maximização se dá sobre duas ações: a primeira é aceitar a oferta de salário e trabalhar sempre recebendo esse salário; a segunda é rejeitar a oferta, receber uma compensação pelo desemprego e esperar até o próximo período para retirar uma nova oferta da mesma distribuição de salário.
- ② O salário de reserva é fixado com base em uma análise custo-benefício.
- ③ Dada a distribuição de salário, o salário de reserva cresce quando a taxa de compensação pelo desemprego diminui.
- ④ Dada a taxa de compensação pelo desemprego, um aumento no risco faz que o salário de reserva diminua.
- ⑤ O período de tempo médio para uma oferta de trabalho bem-sucedida é igual ao inverso da probabilidade de uma oferta ser aceita em uma única tentativa.

**QUESTÃO 19**

Julgue os itens a seguir, acerca do consumo e do investimento.

- ① De acordo com a hipótese da **renda permanente/ciclo de vida**, nenhuma informação disponível em  $t - 1$  pode ser usada para prever a mudança no consumo de  $t - 1$  para  $t$ , sendo  $t$  um índice de tempo.
- ② Se a variância do crescimento do consumo for baixa, mas o coeficiente relativo de aversão ao risco for alto, a poupança precaucional poderá ter um efeito grande sobre o crescimento esperado do consumo.
- ③ Restrições de liquidez podem fazer que a renda corrente seja mais importante para o consumo do que é previsto pela hipótese da renda permanente.
- ④ Assimetrias nos custos de ajustamento do capital justificadas por irreversibilidade do investimento sugerem que há *um valor por esperar*, qualquer que seja o risco sobre o retorno do capital.
- ⑤ Quando há informação assimétrica, a habilidade do investidor de monitorar as firmas e a habilidade das firmas de financiarem seus investimentos por meio de fundos internos também são fatores importantes para o investimento.

**QUESTÃO 20**

Julgue os itens que se seguem, relativos a modelos de preços ativos.

- ① No modelo de preços de ativos de Lucas, quando se assume que os consumidores são neutros ao risco, o preço do ativo é igual ao valor presente descontado dos dividendos esperados, em que a taxa de desconto é constante e igual à taxa de desconto subjetiva dos consumidores.
- ② O modelo de preços de ativos de Lucas tem interesse além do acadêmico, já tendo sido usado em discussões relativas ao elevado diferencial observado entre os retornos dos ativos e dos títulos sem risco nos EUA.
- ③ Na ausência de risco, a estrutura a termo é determinada somente pela trajetória das taxas de juros de curto prazo.
- ④ De acordo com a proposição da equivalência ricardiana, a forma pela qual o governo financia seus déficits ou investe seus superávits é irrelevante. Essa irrelevância com relação ao financiamento é uma aplicação do teorema de Modigliani-Miller.
- ⑤ A equivalência ricardiana aplica-se mesmo que os impostos sejam distorcivos e que haja risco de *default* nos títulos do governo.

**QUESTÃO 21**

Com base na teoria microeconômica do consumidor, julgue os itens a seguir.

- ① Se a relação de preferências **pelo menos tão bom quanto**, definida no espaço de todas as opções possíveis de cestas de consumo, for uma relação completa e transitiva, então a relação de ordem **melhor que** também será uma relação completa e transitiva.
- ② Se as preferências do consumidor satisfizerem às hipóteses de pré-ordem completa (racionais), contínuas, monótonas e estritamente convexas, então poder-se-á concluir que, na solução do problema do consumidor, a razão entre as utilidades marginais de dois bens quaisquer será igual à razão dos preços desses bens.
- ③ Se as curvas de Engel dos diferentes consumidores de uma economia forem retas paralelas, então a função demanda agregada não dependerá da distribuição de riqueza da economia.
- ④ Representando por  $x(p, w)$  a função demanda walrasiana de um consumidor, em que  $p$  é o vetor de preços e  $w$  é a riqueza do consumidor, o axioma fraco da preferência revelada afirma que, se  $p' \cdot x(p', w') \leq w''$  e  $x(p', w') \neq x(p'', w'')$ , então  $p' \cdot x(p'', w'') > w''$ .
- ⑤ Supondo que a qualificação das restrições seja satisfeita, de acordo com o teorema de Kuhn-Tucker, aplicado ao problema-padrão de maximização da utilidade do consumidor, o gradiente da função utilidade terá de estar no cone gerado pelos gradientes das restrições ativas.

**QUESTÃO 22**

Suponha que uma indústria competitiva tenha um grande número de firmas potenciais, todas elas com a mesma tecnologia, expressa pela função de produção  $y = x_1^{1/2} x_2^{1/4}$ , em que  $x_1$  e  $x_2$  são as quantidades dos insumos 1 e 2 utilizados para produzir a quantidade  $y$  do bem. Em face desses dados, julgue os itens a seguir.

- ① Essa tecnologia apresenta retornos crescentes de escala.
- ② As isoquantas são assintóticas aos eixos, para todo  $y > 0$ .
- ③ O coeficiente de elasticidade de substituição é igual a 1.
- ④ Transformações monótonas estritamente crescentes da função de produção representam a mesma tecnologia.
- ⑤ Na presença de custo afundado (*sunk cost*) estritamente positivo, o equilíbrio de longo prazo dessa indústria é caracterizado por um preço igual ao mínimo do custo médio.

**QUESTÃO 23**

Com base na teoria geral do equilíbrio competitivo, julgue os itens a seguir.

- ① Em uma economia de pura troca, com número finito de consumidores e bens, na qual o espaço de bens é o ortante positivo do espaço euclidiano e cada consumidor tem preferências racionais, contínuas e convexas, o teorema do ponto fixo de Brouwer é uma ferramenta limitada para provar a existência de equilíbrio, pois a demanda agregada pode ser uma correspondência hemi-contínua superior.
- ② Defina o preço de um dos bens como numerário, e o vetor das funções excesso de demanda agregada pelos outros bens, cujos argumentos sejam os preços relativos, como mapa do excesso de demanda agregado. Nesse caso, se a economia for regular, então o jacobiano do mapa do excesso de demanda será não-singular.
- ③ Em uma economia de pura troca com finitos bens e agentes, em que cada agente tenha função utilidade Cobb-Douglas, todo equilíbrio competitivo dessa economia pertencerá ao seu núcleo. Além disso, toda alocação que pertencer ao núcleo dessa economia será um equilíbrio competitivo.
- ④ Suponha que em uma economia com um bem físico, dois períodos, com incerteza apenas no segundo período e com  $S$  estados da natureza, uma ação dê retornos diferentes em cada estado da natureza. Nessas condições, essa ação e mais  $S - 1$  opções escritas sobre ela poderão completar o mercado.
- ⑤ Suponha que, em uma economia com incerteza e dois períodos, com incerteza apenas no segundo período, dois estados da natureza, mercados completos e taxa de juros  $i$  real a zero, uma determinada ação custe, no primeiro período, R\$ 10,00 e custará, no segundo período, R\$ 6,00, se o estado da natureza 1 se realizar, ou R\$ 12,00, se o estado da natureza 2 se realizar. Então, nessas condições, uma opção de compra com preço de exercício igual a R\$ 8,00 deverá custar, hoje,  $\frac{RS\ 10,00}{3}$ .

**RASCUNHO**

**QUESTÃO 24**

Julgue os itens que se seguem, com base na teoria moderna do comportamento do investidor em situações de risco.

- ① Um investidor averso ao risco não aceitaria pagar qualquer valor estritamente positivo por uma loteria atuarialmente justa, por menor que fosse esse preço.
- ② Se um investidor tiver função utilidade com coeficiente de aversão absoluta ao risco hiperbólico, então sua carteira de investimento em ativos arriscados e no ativo sem risco será invariante com relação a mudanças na riqueza, sendo carteira definida como o vetor  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ , tal que  $x_n \geq 0$ , para qualquer  $n = 1, 2, \dots, N$ , e  $\sum_{n=1}^N x_n = 1$ , em que  $N$  é o número total de ativos – os arriscados e o sem risco.
- ③ Supondo que um indivíduo tenha função utilidade por riqueza da forma  $u(w) = -e^{-aw}$  e que maximize a utilidade esperada, então seu coeficiente de aversão relativa ao risco será constante e igual a  $a$ .
- ④ Se uma distribuição de probabilidades  $F(\cdot)$  domina estocasticamente no sentido de primeira ordem a função de distribuição  $G(\cdot)$ , então todo investidor com função de utilidade da riqueza côncava preferirá a loteria com distribuição  $F(\cdot)$  à loteria com distribuição  $G(\cdot)$ .
- ⑤ A teoria da aversão ao risco de Arrow e Pratt só é válida quando existe um único bem em cada estado da natureza, podendo somente variar as quantidades disponíveis desse bem. Devido a isso, essa teoria é menos geral que a teoria da utilidade esperada, que é válida mesmo quando existem muitos bens em cada estado da natureza.

**QUESTÃO 25**

Com base na teoria econômica de externalidades e de bens públicos, julgue os itens a seguir.

- ① Se uma economia tiver 5 consumidores, cada um com utilidade marginal de um certo bem público descrita pela curva  $U' = 10 - y$ , sendo  $y$  a quantidade do bem público consumido, e se o custo marginal de produzir o bem público for também  $y$ , então a quantidade ótima de produção do bem público será igual a 5 unidades.
- ② Uma estrada sem pedágios e vazia é um bem público; no entanto, se ela estiver congestionada, será um bem comum, isto é, não-excludente e rival.
- ③ Uma das limitações da escolha social por eleição majoritária entre duas opções sociais é que as preferências sociais geradas por essa eleição podem ser, muitas vezes, não-transitivas.
- ④ Um farol marítimo para auxiliar a navegação é considerado um bem comum em qualquer circunstância.
- ⑤ Sabe-se que, quando um consumidor muda suas preferências por um determinado bem, fazendo que seu preço se eleve, isso acaba afetando a quantidade comprada pelos outros consumidores. Isso significa que o comportamento desse consumidor afeta as preferências dos outros consumidores, causando, assim, uma externalidade.

**QUESTÃO 26**

Considere um jogo na forma normal cuja matriz de *payoffs* é dada abaixo.

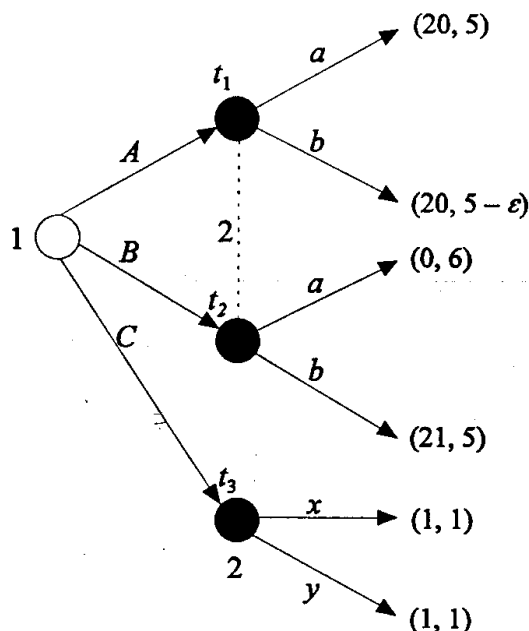
		B		
		L	M	R
A	U	(10, 10)	(0, 0)	(-1, 15)
	S	(-12, 1)	(8, 8)	(-1, -1)
	D	(15, 1)	(8, -1)	(0, 0)

Nesse jogo, há dois jogadores, A e B. As linhas da matriz representam o jogador A e as colunas, o jogador B. As estratégias U, S e D estão disponíveis para o jogador A, enquanto as estratégias L, M e R estão disponíveis para o jogador B. Os números entre parênteses à esquerda das vírgulas são os *payoffs* do jogador A, e os números à direita das vírgulas, os *payoffs* do jogador B. Com relação a esse jogo, julgue os itens a seguir.

- ① As estratégias U e S do jogador A são estritamente dominadas.
- ② O perfil de estratégias (D, L), ou seja, aquele em que o jogador A joga D e o jogador B joga L, é um equilíbrio de Nash.
- ③ A estratégia S do jogador A e a estratégia M do jogador B são racionalizáveis.
- ④ É possível encontrar um equilíbrio de Nash por meio da eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas.
- ⑤ Esse jogo possui um equilíbrio de Nash com estratégias mistas.

**RASCUNHO**

Considere um jogo do qual participem somente os jogadores 1 e 2. O jogador 1 escolhe primeiro entre três ações possíveis:  $A$ ,  $B$  ou  $C$ . Se o jogador 1 escolher  $A$ , o jogador 2 poderá escolher entre as ações  $a$  e  $b$ . Se o jogador 1 escolher  $B$ , novamente o jogador 2 poderá escolher entre as ações  $a$  e  $b$ . Por outro lado, se o jogador 1 escolher  $C$ , o jogador 2 terá como opções as ações  $x$  e  $y$ . O jogador 2 não consegue distinguir entre as ações  $A$  e  $B$  do jogador 1, mas consegue distinguir a opção  $C$  das demais. O diagrama da árvore desse jogo está representado abaixo; nele  $\varepsilon \geq 0$ .



No diagrama acima, os números entre parênteses indicam os *payoffs* associados a cada jogador, sendo os números à esquerda das vírgulas os *payoffs* do jogador 1, e os números à direita das vírgulas, os *payoffs* do jogador 2. O jogador 1 tem apenas um conjunto-informação, formado pelo nó inicial, enquanto o jogador 2 tem dois: o primeiro, formado pelos nós  $t_1$  e  $t_2$ , e o segundo, pelo nó  $t_3$ . Define-se a probabilidade  $\mu(t)$  como a crença do jogador 2 de que ele esteja no nó  $t$ , uma vez que o conjunto-informação em que  $t$  está localizado tenha sido atingido. Observa-se que há três valores possíveis para  $t$ :  $t_1$ ,  $t_2$  e  $t_3$ .

Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.

- 1) Esse é um jogo finito e de informação imperfeita.
- 2) Há três estratégias disponíveis para o jogador 1 e seis para o jogador 2.
- 3) O seguinte perfil de estratégias constitui um equilíbrio de Nash: o jogador 1 escolhe  $B$ ; o jogador 2 escolhe  $b$ , quando o seu conjunto-informação  $\{t_1, t_2\}$  é atingido, e  $y$ , quando o seu conjunto-informação  $\{t_3\}$  é atingido.
- 4) Suponha que o seguinte perfil de estratégias constitua um equilíbrio de Nash: o jogador 1 escolhe  $A$ ; o jogador 2 escolhe  $a$  quando o seu conjunto-informação  $\{t_1, t_2\}$  é atingido, e  $x$ , quando o seu conjunto-informação  $\{t_3\}$  é atingido. Então, em qualquer sistema de crenças que seja consistente com esse perfil de estratégias, ou seja, que satisfaça à regra de Bayes,  $\mu(t_1) = 1$  e  $\mu(t_2) = 0$ .
- 5) Para que exista um equilíbrio bayesiano perfeito fraco desse jogo, é necessário impor a restrição  $\varepsilon > 0$ .

**QUESTÃO 28**

Com base na teoria de informação e incentivos, julgue os itens que se seguem.

- ① Suponha que, em um modelo de perigo moral (*moral hazard*), o agente realize uma ação que afete a sua utilidade e a do principal, que o principal observe um sinal perfeitamente correlacionado ao resultado da ação do agente e desenhe um sistema de incentivos que maximize sua utilidade esperada, sujeita às restrições usuais. Nessas condições, a ação do agente não será Pareto ótima.
- ② A condição de Spence-Mirrlees de que  $\frac{\partial u}{\partial \theta}(q, \theta) > 0$ , para quaisquer  $\theta$  e  $q$ , na qual  $q$  é um vetor de bens,  $\theta$  é o tipo do agente e  $u$  é a função utilidade do agente, garante que as curvas de indiferença de dois tipos diferentes de agentes só se cruzam uma vez.
- ③ O uso do princípio da revelação em um modelo de informação oculta (*hidden information*) permite que a análise restrinja-se a contratos em que o agente revele o seu tipo de maneira direta e honesta.
- ④ A conclusão do modelo de carros usados de Akerlof é que há somente um equilíbrio no qual apenas os carros ruins são vendidos.
- ⑤ Em um modelo de sinalização do tipo de Spence em que a educação adquirida por um trabalhador não afete a sua produtividade, o trabalhador de baixa habilidade prefere não adquirir educação nenhuma em qualquer equilíbrio bayesiano perfeito de separação.

**QUESTÃO 29**

A teoria de desenho de mecanismos tem como objetivo analisar decisões coletivas sob informação assimétrica. Com relação a essa teoria e à teoria de leilões, que é uma de suas aplicações mais importantes, julgue os seguintes itens.

- ① Quando as preferências dos agentes são quasilineares, não existe função de escolha social que seja, ao mesmo tempo, eficiente *ex post* e honestamente implementável (compatível com incentivos) em estratégias dominantes.
- ② Quando a participação em um determinado mecanismo é voluntária, a introdução de condições de racionalidade individual garante que os agentes de fato desejam participar do mecanismo.
- ③ De acordo com o teorema de Myerson-Satterthwaite, o comprador e o vendedor de uma unidade de um bem indivisível não são capazes de esgotar os ganhos de troca quando eles têm informação assimétrica e existe uma probabilidade positiva de não existirem ganhos de troca.
- ④ Considerando um leilão de segundo preço com propostas seladas em que a proposta do indivíduo  $i$  seja representada por  $s_i$ , se houver 10 indivíduos participando desse leilão e os valores das propostas forem ordenados da forma  $s_1 < s_3 < s_5 < s_4 < s_7 < s_{10} < s_6 < s_2 < s_8 < s_9$ , então o vencedor do leilão será o indivíduo 8, que pagará  $s_8$  pelo objeto leiloado.
- ⑤ Considere a seguinte situação hipotética:  
Em um leilão de primeiro preço, há apenas dois participantes, os indivíduos A e B. Para o indivíduo A, o objeto a leiloar vale R\$ 20.000,00, enquanto que, para o indivíduo B, ele vale R\$ 1.000,00. Sabe-se que ambos os participantes submetem propostas seladas, que podem ser de R\$ 0,00, R\$ 500,00, R\$ 1.000,00, R\$ 10.000,00, R\$ 20.000,00 ou R\$ 25.000,00. Se as propostas dos dois participantes forem do mesmo valor, então haverá um sorteio para decidir quem ficará com o objeto, no qual a probabilidade de cada participante receber o bem será igual a 1/2. Então o resultado desse leilão, quando o conceito de eliminação iterativa de estratégias fracamente e estritamente dominadas for utilizado, é que o indivíduo A fará uma proposta de R\$ 1.000,00, enquanto o indivíduo B proporá R\$ 500,00, significando que o indivíduo A receberá o bem.

**QUESTÃO 30**

Julgue os itens a seguir.

- ① A solução de Harsanyi para tratar um jogo com informação incompleta é transformá-lo em um jogo de informação imperfeita em que as preferências dos jogadores sejam realizações de variáveis aleatórias.
- ② Em jogos finitos de informação perfeita, o conjunto de equilíbrios perfeitos em subjogos coincide com o conjunto de equilíbrios de Nash que resultam da aplicação do método de indução retroativa (*backward induction*).
- ③ Um equilíbrio bayesiano perfeito fraco exige que o perfil de estratégias seja sequencialmente racional, dado o sistema de crenças, em todos os conjuntos-informação que ocorrem com probabilidade positiva, enquanto que o equilíbrio de Nash exige que o perfil de estratégias seja sequencialmente racional, dado o sistema de crenças, em todos os conjuntos-informação.
- ④ As estratégias que fazem parte de um equilíbrio sequencial constituem um equilíbrio perfeito em subjogos, mas nem todo equilíbrio sequencial é um equilíbrio bayesiano perfeito fraco.
- ⑤ Em um modelo de jogos com incerteza knightiana, os agentes avaliam as consequências das suas ações mediante o uso de funções de probabilidade que satisfaçam à condição  $P(A) + P(A^c) \leq 1$ , em que  $P$  é a medida de probabilidade,  $A$  é um evento e  $A^c$  é o seu complementar, sendo o coeficiente de aversão à incerteza definido como  $1 - P(A) - P(A^c)$ .

**RASCUNHO**



**QUESTÃO 31**

Considere a função

$$f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ definida por } f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ é racional,} \\ 2y, & \text{se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$$

Acerca dessa função, julgue os itens abaixo.

- ① A integral iterada de Riemann  $\int_0^1 \left[ \int_0^1 f(x, y) dy \right] dx$  não existe.
- ② A integral iterada de Riemann  $\int_0^1 \left[ \int_0^1 f(x, y) dx \right] dy$  existe.
- ③ A função  $f$  não é Lebesgue integrável em  $[0, 1] \times [0, 1]$ .
- ④  $f$  é contínua em  $[0, 1] \times [0, 1]$ , exceto em um conjunto de medida nula.
- ⑤ Existe uma sequência  $\{g_n\}$  de funções contínuas, com suporte compacto em  $[0, 1] \times [0, 1]$ , tal que  $f(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x, y)$  para quase todo ponto  $(x, y)$  em  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

**QUESTÃO 32**

Considere o subconjunto do espaço euclidiano

$$\overline{B}(0, 1) = \{x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \|x\|^2 = \sum_{i=1}^m x_i^2 \leq 1\}$$

e a aplicação

$$f: \overline{B}(0, 1) \rightarrow \overline{B}(0, 1).$$

Suponha que exista  $\theta \geq 1$  tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|^\theta, \forall x, y \in \overline{B}(0, 1).$$

Dado  $n \in \mathbb{N}$ , considere  $f_n = \lambda_n f$ , em que  $\{\lambda_n\}$  é uma sequência de números reais do

intervalo  $(0, 1)$  que satisfaz à condição  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 1$ .

Com base nesses dados, julgue os itens seguintes.

- ① Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  tem um único ponto fixo, isto é, existe um único  $\xi_n \in \overline{B}(0, 1)$  tal que  $f_n(\xi_n) = \xi_n$ .
- ② A função  $f$  possui pelo menos um ponto fixo, isto é,  $f(\xi) = \xi$  para algum  $\xi \in \overline{B}(0, 1)$ .
- ③ Se a derivada  $f'(x)$  existir para  $x \in B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| < 1\}$ , então  $\|f'(x)\| \leq 1$ .
- ④ Se  $\theta > 1$ , então  $f$  será constante.
- ⑤ Considerando-se  $A$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^m$  e  $g: A \rightarrow \mathbb{R}^m$  derivável, se  $g'(x) = 0$  para todo  $x \in A$ , então  $g$  será constante.

**RASCUNHO**

**QUESTÃO 33**

Julgue os itens que se seguem.

- ① Se uma função real  $f$ , continuamente diferenciável no intervalo  $[0, 1]$ , é tal que  $f(1) = 0$  e  $\int_0^1 f^2(x) dx = 1$ , então  $\int_0^1 x f(x) f'(x) dx = -\frac{1}{2}$  e  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \cdot \int_0^1 x^2 f^2(x) dx \geq \frac{1}{4}$ .
- ② Existe uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , duas vezes diferenciável, com  $f''$  contínua e com  $f$  e  $f''$  limitadas sem que  $f'$  seja também limitada.
- ③ Se uma função  $f$  for contínua no intervalo  $[0, 1]$  e  $\int_0^1 f(x) x^n dx = 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então  $f(x) = 0$  para todo  $x \in [0, 1]$ .
- ④ Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , defina a função  $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$ , para  $x \in [0, 1]$ . Então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$ .
- ⑤ Considere que  $f$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sejam funções contínuas no retângulo

$$a \leq x \leq b, \quad y_0 - \eta \leq y \leq y_0 + \eta,$$

para algum  $\eta > 0$ . Definindo  $F(y) = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx$  e  $G(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$ , então  $F(y_0) = G(y_0)$ .

**RASCUNHO**

**QUESTÃO 34**

Considere uma firma caracterizada por uma tecnologia ou, equivalentemente, suponha que exista um conjunto convexo  $Y \subset \mathbb{R}^n$ , contendo a origem, que esteja associado à produção dessa firma. Pode-se interpretar  $Y$  como o conjunto dos pontos  $y = (y_1, \dots, y_n)$  nos quais a firma pode operar; se  $y_i \leq 0$ , a firma está usando o bem  $i$  como insumo para a produção e se  $y_i \geq 0$ , a firma está produzindo o bem  $i$ . Dado um preço

$$p \in L_+^{n-1} = \{(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n : p_i \geq 0, 1 \leq i \leq n, \text{ e } \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$$

e uma atividade  $y \in Y$ , o lucro da firma é determinado por  $p \cdot y = \sum_{i=1}^n p_i y_i$ . Suponha que para

o preço  $p$ , o objetivo da firma seja buscar o conjunto dos níveis de atividade  $\psi(p)$  que maximizem o seu lucro. Nesse modelo,  $\psi: L_+^{n-1} \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  é uma correspondência determinada pela relação

$$\psi(p) = \{y \in Y : p \cdot y = \sup_{z \in Y} p \cdot z\},$$

em que  $\mathcal{P}(Y)$  denota o conjunto das partes de  $Y$ .

Diz-se que uma correspondência  $\varphi: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ , em que  $X \subset \mathbb{R}^m$  e  $Y \subset \mathbb{R}^n$ , é semicontínua superiormente (s.c.s.) se para  $x \in X$  e  $y \in Y$ , e para quaisquer pares de seqüências  $\{x_k\} \subset X$ ,  $\{y_k\} \subset Y$ , tais que  $y_k \in \varphi(x_k)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x_k \rightarrow x$  e  $y_k \rightarrow y$ , tem-se  $y \in \varphi(x)$ .

Com base nessas informações, julgue os seguintes itens.

- ① A firma pode operar com prejuízo, isto é, existe um preço  $p \in L_+^{n-1}$  tal que, para todo  $y \in Y$ , tem-se  $p \cdot y < 0$ .
- ② Se  $Y$  é compacto, existe um preço de mercado  $p^* \in L_+^{n-1}$  e um nível de atividade associado  $y^* \in Y$  que permitem à firma obter o maior lucro possível, isto é,  $p^* \cdot y^* = \max\{p \cdot z : p \in L_+^{n-1}, z \in Y\}$ .
- ③ Se  $Y$  é limitado, então  $\psi(p)$  é um conjunto não-vazio para todo  $p \in L_+^{n-1}$ .
- ④ Se  $Y$  é fechado, então  $\psi$  é s.c.s.
- ⑤ Se  $Y$  é compacto e  $\psi$  é uma função univalente, então  $\psi$  é contínua.

**QUESTÃO 35**

Considere  $A = [a_{ij}]$  uma matriz  $n \times n$  positiva, isto é,  $a_{ij} > 0$  para todo  $i$  e  $j$ . Considere, ainda,

$$L_+^{n-1} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n, \text{ e } \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$$

e a aplicação  $T: L_+^{n-1} \rightarrow L_+^{n-1}$ , definida por  $T(x) = [\lambda(x)]^{-1}Ax$ , em que  $Ax = A[x]$  é o produto da matriz  $A$  pelo vetor coluna  $[x]_{n \times 1}$  e  $\lambda(x) > 0$  é escolhido de forma que  $T(x) \in L_+^{n-1}$ .

Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.

- 1 Se  $x > 0$ , isto é,  $x_i \geq 0$  para todo  $i$  e  $x_i > 0$  para algum  $i$ , então  $Ax \neq 0$ .
- 2  $L_+^{n-1}$  é um subconjunto compacto e convexo de  $\mathbb{R}^n$ .
- 3  $T$  é uma função limitada; no entanto,  $T$  não é uma função contínua.
- 4  $T$  possui um ponto fixo  $\tilde{x} \in L_+^{n-1}$ , que é um autovetor de  $A$  associado a um autovalor positivo.
- 5 Se  $B$  é uma matriz  $n \times n$  com entradas não-negativas, então  $B$  possui um autovalor  $\tilde{\lambda} > 0$  e um autovetor de componentes não-negativas associado a  $\tilde{\lambda}$ .

**RASCUNHO**

**QUESTÃO 36**

Suponha que  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  seja um espaço de probabilidade e que  $\{E_n\}$  seja uma seqüência de eventos. Defina-se os limites superior e inferior da seqüência  $\{E_n\}$  pelas relações:

$$\limsup E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \text{ e } \liminf E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k.$$

Define-se, também, que  $\{E_n\}$  é uma seqüência de eventos independentes se  $P(E_{j_1} \cap \dots \cap E_{j_k}) = \prod_{i=1}^k P(E_{j_i})$  para toda família finita de índices  $1 \leq j_1 < \dots < j_k$ . Com base nessas informações, julgue os itens que se seguem.

- ①  $P(\limsup E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k)$ .
- ② Se todo ponto de  $\Omega$  pertencer a  $E_n$  para um número infinito de índices, então  $P(\liminf E_n) = 1$ .
- ③ Se  $\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$  for divergente, então  $P(\limsup E_n) = 1$ .
- ④ Se  $\{E_n\}$  for uma seqüência de eventos independentes, então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$  será convergente se, e somente se,  $P(\liminf E_n) < 1$ .
- ⑤ Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n) = 0$  e a série  $\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n \cap (\Omega \setminus E_{n+1}))$  for convergente, então  $P(\limsup E_n) = 0$ .

**QUESTÃO 37**

Suponha que  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  seja um espaço de probabilidade e que  $X: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$  é uma variável aleatória integrável em relação a  $P$ , isto é,

$$E(|X|) = \int_{\Omega} |X(w)| dP < \infty.$$

Dada uma função convexa  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , a relação  $\varphi(E(X)) \leq E(\varphi \circ X)$  é conhecida na literatura como **desigualdade de Jensen**. As afirmações abaixo estabelecem uma possível demonstração dessa desigualdade.

- I - Pode-se supor, sem perda de generalidade, que  $|X(w)| < \infty$  para todo  $w \in \Omega$ .
- II - A função composta  $\varphi \circ X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma variável aleatória.
- III - O conjunto  $\text{Epi}(\varphi) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x) \leq t\}$  é fechado e convexo.
- IV - Supondo que  $\varphi(E(X)) < \infty$ , então existem  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que

$$\begin{cases} aE(X) + b = \varphi(E(X)), \\ aX(w) + b \leq \varphi(X(w)), \forall w \in \Omega. \end{cases}$$

- V - A desigualdade de Jensen é obtida das duas relações do item IV, integrando-se a segunda delas em relação a  $P$ .

Com o objetivo de justificar as etapas aqui apresentadas da demonstração da desigualdade de Jensen, julgue os itens a seguir.

- ① Se a variável aleatória  $X: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  for não-negativa e integrável, então o conjunto  $\{w \in \Omega : X(w) = \infty\}$  será vazio.
- ② Se uma função  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  for limitada em intervalos limitados da reta e  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  for uma variável aleatória, então  $g \circ X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  será uma variável aleatória.
- ③ Toda função convexa  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua.
- ④ Considerando que  $V$  seja um espaço vetorial normado de dimensão finita, se  $K \subset V$  for um subconjunto não-vazio e convexo e  $x \in V$  não for um ponto interior de  $K$ , então existirá uma aplicação linear e não-trivial,  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) \leq f(y), \forall y \in K$ .
- ⑤ Considerando que  $Y, Z: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sejam variáveis aleatórias tais que  $Z(w) \leq Y(w)$  quase certamente em  $\Omega$ , se  $Z$  for integrável, então  $Y$  será integrável.

**RASCUNHO**

**QUESTÃO 38**

**RASCUNHO**

Considere o espaço  $L^2(0, 1)$  com a medida de Lebesgue e a norma usual  $\|\cdot\|$ . Suponha que  $T: L^2(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma aplicação linear contínua e defina  $\varphi: L^2(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\varphi(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - T(u), \forall u \in L^2(0, 1).$$

Nessa situação, julgue os itens que se seguem.

- ① Toda sequência limitada  $\{u_n\} \subset L^2(0, 1)$  possui uma subsequência convergente.
- ②  $\varphi$  é fracamente semicontínua inferiormente, isto é, vale a desigualdade  $\varphi(u) \leq \liminf \varphi(u_n)$ , se  $\{u_n\}$  converge fracamente para  $u$ .
- ③  $\varphi$  não é coerciva, isto é, existe uma sequência não-limitada  $\{u_n\} \subset L^2(0, 1)$  tal que a sequência  $\{\varphi(u_n)\} \subset \mathbb{R}$  é limitada superiormente.
- ④  $\varphi$  é limitada inferiormente; no entanto, não existe  $u_0 \in L^2(0, 1)$  tal que  $\varphi(u_0) \leq \varphi(u), \forall u \in L^2(0, 1)$ .
- ⑤ É possível encontrar  $u_0 \in L^2(0, 1)$  que satisfaça à condição  $T(u) = \int_0^1 u(x)u_0(x) dx, \forall u \in L^2(0, 1)$ .

**QUESTÃO 39**

Considere  $E$  um espaço vetorial normado com norma  $\|\cdot\|$  e  $E^*$  o seu espaço dual, formado pelos funcionais lineares contínuos  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ , dotado da norma dual:  $\|f\|_{E^*} = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} f(x), f \in E^*$ .

Com base nessas informações, julgue os itens seguintes.

- ①  $E^*$  será um espaço de Banach se, e somente se,  $E$  for um espaço de Banach.
- ② Se  $\bar{B}(0, 1) = \{x \in E: \|x\| \leq 1\}$  e se  $\varphi: \bar{B}(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  for uma função contínua, então existirá um elemento  $x_0 \in \bar{B}(0, 1)$  tal que  $\varphi(x_0) \leq \varphi(x), \forall x \in \bar{B}(0, 1)$ .
- ③ Se todo subespaço fechado e próprio de  $E$  tiver dimensão finita, então  $E$  terá dimensão finita.
- ④ Se  $F$  for um subespaço vetorial de  $E$  tal que o fecho  $\bar{F} = E$ , então um funcional  $f \in E^*$  será identicamente nulo se, e somente se,  $f(x) = 0$  para todo  $x \in F$ .
- ⑤ Suponha que  $E$  seja um espaço de Hilbert e que  $\{x_n\} \subset E$  é uma sequência limitada. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$  para todo funcional  $f \in E^*$ , então  $\{x_n\}$  converge para  $x$ .

**QUESTÃO 40**

Considere um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  com uma família de sub- $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ . Suponha que cada  $\mathcal{A}_t$  contenha os eventos de  $\mathcal{A}$  com  $P$ -probabilidade nula, e que  $(W_t, \mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$  seja um processo de Wiener. Um processo populacional com taxa de crescimento sujeita ao efeito de uma perturbação aleatória origina um processo estocástico  $\{N_t\}_{t \geq 0}$ , definido pela relação

$$N_t = N_0 + \int_0^t r N_s ds + \int_0^t \alpha N_s dW_s, \quad (I)$$

em que  $r$  e  $\alpha$  são constantes, a segunda integral é definida no sentido de Ito e  $N_0$  é uma variável aleatória positiva independente de  $W_t$ . Nessas condições, julgue os itens seguintes.

- ① Para  $h > 0$ ,  $N_{t+h} = N_t + \int_t^{t+h} r N_s ds + \int_t^{t+h} \alpha N_s dW_s$ .
- ② Não existe versão de  $N_t$  tal que  $t \mapsto N_t(\omega)$  seja quase certamente contínua.
- ③ O processo  $X_t = N_0 \exp\{(r - \frac{\alpha^2}{2})t + \alpha W_t\}$  satisfaz à relação I.
- ④  $\mu_t = E(N_t)$  satisfaz  $\frac{\mu'_t}{\mu_t} = r$  ou, equivalentemente,  $\mu_t = \mu_0 e^{rt}$ .
- ⑤ O processo  $Y_t = N_t^2$  satisfaz à relação  $Y_t = N_0^2 + \int_0^t 2r Y_s ds + 2\alpha \int_0^t Y_s dW_s$ .

**RASCUNHO**

Nas questões de 41 a 50, a menos que seja explicitamente informado o contrário, para uma matriz  $A$  de ordem  $m \times n$ , a notação  $A'$  representa a sua transposta, a expressão  $\ln(x)$  denota o logaritmo neperiano de  $x$  e  $\exp(x) = e^x$ .

**QUESTÃO 41**

Considerando  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma amostra aleatória da distribuição de Bernoulli com parâmetro  $p \in [0, 1]$ , isto é,  $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = p$ , e definindo  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , julgue os itens a seguir.

- ①  $S_n$  não é uma estatística minimal suficiente.
- ②  $\delta(X_1, \dots, X_n) = n^{-1}S_n$  é o estimador de máxima verossimilhança de  $p$ .
- ③ Considerando a função de perda quadrática e uma distribuição *a priori* para  $p$ , uniforme no intervalo  $[0, 1]$ , então  $\delta(X_1, \dots, X_n) = n^{-1}S_n$  é o estimador bayesiano de  $p$ .
- ④ Se  $\eta = \eta(X_1, \dots, X_n)$  é um estimador de  $p$  tal que a esperança  $E(\eta) = p$  para todo  $p \in [0, 1]$ , então a variância  $\text{Var}(\eta) \geq n^{-1}p(1-p)$ .
- ⑤ Para todo número real  $x$ , tem-se que  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{n}} \leq x\right) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ .

**QUESTÃO 42**

Deseja-se avaliar o comportamento da variável investimento em um conjunto de firmas. Nesse contexto, a partir de uma amostra aleatória de 10 firmas desse conjunto, observam-se, para cada firma  $i = 1, \dots, 10$ , em cada ano  $t = 1, \dots, 20$ , as variáveis investimento  $y_{it}$ , lucro esperado  $x_{1it}$  e estoque de capital  $x_{2it}$ . Para a evolução dos dados, postula-se o seguinte modelo de componentes de erro

$$y_{it} = \beta_{0i} + \beta_1 x_{1it} + \beta_2 x_{2it} + \epsilon_{it}$$

As quantidades  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são parâmetros e os componentes de erro  $\epsilon_{it}$  são não-correlacionados entre firmas e ao longo dos anos para cada firma. Esses componentes apresentam esperança zero e variância constante  $\sigma_\epsilon^2$ . Os componentes  $\beta_{0i}$  têm a representação  $\beta_{0i} = \eta_i + \alpha$ , em que  $\alpha$  é uma constante desconhecida e  $\eta_1, \dots, \eta_{10}$  formam uma amostra aleatória de uma população com média zero e variância  $\sigma_\eta^2$ . As realizações  $\eta_i$  são independentes dos erros  $\epsilon_{it}$ .

Com relação a essa situação, julgue os itens que se seguem.

- ① Representando por  $y_i$  o vetor, de dimensão  $20 \times 1$ , das observações de investimento para a firma  $i$ , então a matriz de variâncias e covariâncias de  $y_i$  é dada por  $\text{Var}(y_i) = \sigma_\epsilon^2 I + \sigma_\eta^2 J$ , em que  $J$ , de dimensão  $20 \times 20$ , é uma matriz cujas entradas são todas iguais a 1 e  $I$ , também de dimensão  $20 \times 20$ , é a matriz identidade.
- ② Os estimadores de mínimos quadrados de  $\alpha$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são *viesados*.
- ③ Se  $\bar{y}_i$  é a média aritmética das observações  $y_{it}$ ,  $t = 1, \dots, 20$ , então a variância de  $\bar{y}_i$  é dada pela expressão  $\text{Var}(\bar{y}_i) = \sigma_\eta^2 + 0,05 \sigma_\epsilon^2$ .
- ④ Um estimador assintoticamente mais eficiente que o estimador de mínimos quadrados obtém-se pela utilização do método de mínimos quadrados generalizados com a substituição dos componentes de variância  $\sigma_\eta^2$  e  $\sigma_\epsilon^2$  por estimativas consistentes.
- ⑤ Supondo que a regressão dos investimentos médios de cada firma,  $\bar{y}_i$ , em uma constante, nas médias de lucro esperado,  $\bar{x}_{1i}$ , e nas médias de capital,  $\bar{x}_{2i}$ , tenha produzido como erro médio quadrático a quantidade  $\frac{144.365,00}{20}$  e, sabendo-se que a estimativa de  $\sigma_\epsilon^2$  é 2.781,00, é correto concluir que a estimativa do componente de variância  $\sigma_\eta^2$  é menor que 6.000,00.

Deseja-se estudar, em nível nacional, a evolução do consumo,  $y_t$ , e da renda pessoal disponível,  $x_t$ . Com esse propósito, observam-se os pares  $(x_t, y_t)$  de renda pessoal disponível e consumo, em um período de 100 trimestres. Postula-se que  $y_t = \alpha + \beta x_t + u_t$ , para  $t = 1, \dots, 100$ . O ajuste de mínimos quadrados ordinários produziu um valor de  $R^2$  em torno de 98% e uma estatística de Durbin-Watson muito abaixo desse valor. Nesse contexto, questiona-se se a regressão é espúria e se realmente existe uma relação de co-integração entre consumo e renda pessoal disponível.

Julgue os itens a seguir, utilizando, para isso, as tabelas abaixo.

**Tabela I – Valores críticos para o teste de Diskey-Fuller (tendência linear)**

n	0,025	0,05	0,1
50	-3,80	-3,50	-3,18
100	-3,73	-3,45	-3,15
250	-3,69	-3,42	-3,13

Obs.: Níveis probabilísticos indicados nas colunas.

W. A. Fuller. *Introduction to statistical Time Series*, 1996, 2.ª ed., p. 242.

**Tabela II – Valores críticos para o teste de cointegração de Engel-Granger**

m	0,01	0,05	0,1
2	-3,90	-3,34	-3,04
3	-4,29	-3,74	-3,45
4	-4,64	-4,10	-3,81

Obs.: Níveis probabilísticos indicados nas colunas; m é o número de variáveis na equação de co-integração.

G. J. Mackinnon. *Estimation and inference in econometrics*, 1993, p. 722.

- ① Se o consumo e a renda pessoal disponível são séries temporais integradas, de ordens distintas, então a regressão de  $y$  em  $x$  pode não ser espúria.
- ② Representando por  $\Delta$  o operador diferença, considere que, com o uso de mínimos quadrados ordinários, foram obtidos os seguintes resultados

$$\begin{cases} \Delta y_t = 80 - 0,80t - 0,02y_{t-1} \\ (1,5) \quad (1,3) \quad (-1,3) \\ \Delta x_t = 300 - 2,80t - 0,20x_{t-1} \\ (2,7) \quad (2,5) \quad (-2,5) \end{cases}$$

em que os valores entre parênteses indicam a estatística de Student associada à hipótese de que o parâmetro correspondente seja nulo. Nessas condições, com base na tabela de Dickey-Fuller (tabela I), é correto concluir que há evidência de que  $y_t$  e  $x_t$  não sejam processos com raízes unitárias.

- ③ Supondo que os processos  $y_t$  e  $x_t$  tenham raízes unitárias e que as diferenças  $\Delta y_t$  e  $\Delta x_t$  sejam estacionárias, então  $y_t$  e  $x_t$  são integradas de ordem 1.
- ④ Considere  $e_t$  o resíduo da regressão de mínimos quadrados de  $y_t$  em  $x_t$  e, suponha que a regressão de  $\Delta e_t$  em  $e_{t-1}$ , sem intercepto, tenha produzido como estatística de Student do coeficiente de  $e_{t-1}$  o valor -4,6 e, ainda, que  $y_t$  e  $x_t$  são ambas  $I(1)$ . Então, da tabela do teste de Engel-Granger (tabela II), é correto concluir que  $y_t$  e  $x_t$  se co-integram.
- ⑤ Supondo que  $y_t$  e  $x_t$  se co-integrem, então a estatística de Student associada à regressão de mínimos quadrados ordinários de  $y_t$  em  $x_t$  pode ser usada no processo de inferência sobre  $\beta$  do modo usual, isto é, a estatística de Student correspondente a  $\beta$  tem distribuição assintótica normal padrão sob a hipótese  $\beta = 0$ .



Considere um modelo de duas equações simultâneas com a seguinte forma estrutural

$$\begin{cases} y_{1t} = \alpha + \beta y_{2t} + u_t \\ y_{2t} = \gamma + \delta y_{1t} + v_t \end{cases}$$

em que  $\beta \neq 1$ , as variáveis endógenas  $y_{1t}$  e  $y_{2t}$  e a variável exógena  $x_t$  são observadas para  $t = 1, 2, \dots, n$  e os erros  $u_t$  são variáveis aleatórias independentes com distribuição normal de média zero e variância  $\sigma_u^2 > 0$ .

Assumindo que  $x_t$  sejam valores fixos (não-aleatórios) e que a matriz

$$n^{-1} \begin{pmatrix} n & \sum_{t=1}^n x_t \\ \sum_{t=1}^n x_t & \sum_{t=1}^n x_t^2 \end{pmatrix} \text{ convirja a uma matriz } \Sigma, \text{ não-singular,}$$

julgue os seguintes itens.

① As equações simultâneas 
$$\begin{cases} y_{1t} = \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{\beta}{1-\beta} x_t + \frac{1}{1-\beta} u_t \\ y_{2t} = \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{1}{1-\beta} x_t + \frac{1}{1-\beta} u_t \end{cases}$$

constituem a forma reduzida do modelo.

② O coeficiente de correlação entre  $u_t$  e  $v_t$  é igual a  $\sigma_v^2$ .

③ A equação  $y_{1t} = \alpha + \beta y_{2t} + u_t$  do modelo não está identificada.

④ O estimador de  $\beta$  obtido aplicando-se o método dos mínimos quadrados ordinários na primeira equação da forma estrutural é viesado em amostras finitas, mas é consistente no sentido fraco.

⑤ O estimador de  $\beta$  definido por  $\frac{\hat{b}}{1+\hat{b}}$ , em que  $\hat{b}$  é o estimador de mínimos quadrados ordinários de  $b$  na equação  $y_{1t} = a + bx_t + u_t$ , é viesado em amostras finitas, mas é consistente no sentido fraco.

Considere o ajuste da função de produção CES (elasticidade de substituição constante) a um conjunto de trinta observações das variáveis  $Q$  (produção),  $K$  (capital) e  $L$  (mão-de-obra). Desse modo, postula-se que

$$\ln(Q_t) = \beta_0 + \beta_1 \ln(\beta_2 L_t^{\beta_3} + (1 - \beta_2) K_t^{\beta_3}) + \epsilon_t, \text{ para } t = 1, \dots, 30,$$

em que  $\beta' = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$  é um vetor de parâmetros desconhecidos e os resíduos  $\epsilon_t$  são independentes e homocedásticos com variância comum  $\sigma^2$ . Considere, ainda,  $J(\beta)$  a matriz jacobiana da resposta esperada no modelo de regressão não-linear acima. Sabendo que o ajuste de mínimos quadrados produziu as estatísticas

parâmetro	estimativa
$\beta_0$	0,1244
$\beta_1$	-0,3367
$\beta_2$	0,3366
$\beta_3$	-3,0075
$\sigma^2$	0,0677
$R^2$	9713

e que

$$V = (J(\hat{\beta})' J(\hat{\beta}))^{-1} = \begin{pmatrix} 0,0906 & -0,0277 & 0,0932 & -0,8744 \\ -0,0277 & 0,2733 & -0,4284 & 3,6489 \\ 0,0932 & -0,4284 & 1,0945 & -9,3176 \\ -0,8744 & 3,6489 & -9,3176 & 79,3764 \end{pmatrix}$$

em que  $\hat{\beta}$  é o estimador de  $\beta$ , julgue os itens a seguir.

- ① O desvio-padrão do estimador de mínimos quadrados de  $\beta_2$  é estimado pela quantidade  $(0,0677 \times 1,0945)^{0,5}$ .
- ② Os estimadores de mínimos quadrados de  $\beta_0$  e  $\sigma^2$  são não-viesados.
- ③ O processo de inferência estatística assintótico associado ao estimador de mínimos quadrados independe da hipótese de normalidade para os resíduos.
- ④ O coeficiente de determinação  $R^2$ , mostrado na tabela acima, ao contrário da regressão linear com intercepto, não pode ser calculado como o quadrado do coeficiente de correlação entre valores observados e preditos.
- ⑤ Supondo que, no ajuste da função de produção CES, seja de interesse o teste da hipótese  $H_0: \beta_1 = \beta_3^{-1}$  contra a alternativa  $H_1: \beta_1 \neq \beta_3^{-1}$  e sendo  $q(\beta) = \beta_1 - \beta_3^{-1}$  e  $\nabla q(\hat{\beta})$  o vetor gradiente (coluna) de  $q(\beta)$ , avaliado em  $\hat{\beta}$ , então, para acessar a significância de  $H_0$  no nível  $\alpha \in (0, 1)$ , pode-se comparar o valor

$$W = \frac{(q(\hat{\beta}))^2}{0,0677 \nabla q(\hat{\beta})' V \nabla q(\hat{\beta})} \text{ com o quantil } F_{1-\alpha} (1, 26) \text{ da distribuição } F.$$

## QUESTÃO 46

O problema de estimação de modelos de regressão com variáveis dependentes defasadas aparece, entre outras situações, quando existe o fenômeno de **ajuste parcial**. Em uma versão simplificada dessa situação, tem-se, para  $t = 1, 2, \dots, n$ ,

$$y_t^* = \alpha + \beta x_t,$$

em que  $y_t^*$  é um valor ideal, não-observável, de uma variável econômica, e observa-se  $y_t$ , que satisfaz

$$y_t - y_{t-1} = \gamma[y_t^* - y_{t-1}^*] + u_t,$$

em que  $0 < \gamma < 1$  e  $u_t$  são variáveis aleatórias normais e independentes, com média zero e variância  $\sigma_u^2 > 0$ . Combinando as duas equações acima, obtém-se

$$y_t = a + bx_t + cy_{t-1} + u_t, \quad (I)$$

em que  $a = \alpha\gamma$ ,  $b = \beta\gamma$  e  $c = 1 - \gamma$ . Representando por  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  e  $\hat{c}$  os valores que minimizam a soma de quadrados  $\sum_{t=1}^n (y_t - a - bx_t - cy_{t-1})^2$ , isto é, os estimadores de mínimos quadrados ordinários de  $a$ ,  $b$  e  $c$  na equação I, definindo  $\hat{\beta} = (1 - \hat{c})^{-1}\hat{b}$  e assumindo, além das condições anteriores, que os valores  $x_t$  e  $y_0$  são variáveis fixas, não-aleatórias, e que a matriz

$$n^{-1} \begin{pmatrix} n & \sum_{t=1}^n x_t \\ \sum_{t=1}^n x_t & \sum_{t=1}^n x_t^2 \end{pmatrix}$$

converge a uma matriz  $\Sigma$ , não-singular, julgue os seguintes itens.

- ①  $\hat{b}$  é um estimador de  $b$ , consistente no sentido fraco.
- ②  $\hat{b}$  é um estimador não-viesado de  $b$ .
- ③  $\hat{\beta}$  é um estimador de  $\beta$ , consistente no sentido fraco.
- ④ A verossimilhança associada à equação I é dada por

$$L(a, b, c, \sigma_u^2) = (2\pi \sigma_u^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_u^2} \sum_{t=1}^n (y_t - a - bx_t - cy_{t-1})^2 \right\}.$$

- ⑤  $\hat{\beta}$  é assintoticamente eficiente para estimar  $\beta$ .

## QUESTÃO 47

Considere  $\{z_t : t \in \mathbb{Z}\}$  um processo estocástico ARIMA (0, 1, 1) satisfazendo  $z_t - z_{t-1} = a_t - \theta a_{t-1}$ , em que  $|\theta| < 1$  e  $a_t$  são variáveis aleatórias normais, independentes e identicamente distribuídas, com média zero e variância  $\sigma_a^2$ . Definindo  $w_t = z_t - z_{t-1}$ , julgue os itens abaixo.

- ① O processo  $z_t$  é estacionário.
- ②  $a_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j w_{t-j}$  se, e somente se,  $\psi_j = \theta^j$ , para  $j \geq 0$ .
- ③ A função de autocorrelação  $\rho_w(k) = \frac{E(w_t w_{t-k})}{E(w_t^2)}$  satisfaz  $|\rho_w(1)| < \frac{1}{2}$  e  $\rho_w(k) = 0$ , para  $k > 1$ .
- ④ O estimador  $\hat{\theta} = \frac{\sum_{t=2}^n w_t w_{t-1}}{\sum_{t=1}^n w_t^2}$  é consistente no sentido fraco para estimar  $\theta$ .
- ⑤  $\hat{z}_t(k) = E(z_{t+k} | z_t, z_{t-1}, \dots)$  é o preditor de erro médio quadrático mínimo de  $z_{t+k}$ , com base na informação  $\{z_t, z_{t-1}, \dots\}$  e, para  $k \geq 2$ ,  $\hat{z}_t(k) = \hat{z}_t(k-1)$ .

**QUESTÃO 48**

Considere o processo auto-regressivo vetorial de primeira ordem dado por

$$\begin{pmatrix} y_t \\ x_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \end{pmatrix}, \text{ para } t = 1, \dots, n.$$

As constantes reais  $a_{ij}$  e  $\mu_i$  são parâmetros e  $x_t$  e  $y_t$  são variáveis reais. Supondo que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

tenha duas raízes características reais distintas, de valores absolutos menores que 1 e que  $\epsilon'_t = (\epsilon_{1t}, \epsilon_{2t})$  seja um processo de ruído branco bivariado, com média zero e matriz de variância  $\Omega = (\omega_{ij})$ , julgue os itens que se seguem.

- ① As componentes  $x_t$  e  $y_t$  definem processos estocásticos estacionários.
- ② A matriz  $\Pi = I - A$ , em que  $I$  é a matriz identidade, é não-singular e o vetor  $\Pi^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$  é o vetor de equilíbrio estático do processo.
- ③ As equações do processo auto-regressivo vetorial  $(y_t, x_t)'$  não podem ser estimadas separadamente por mínimos quadrados, pois essa técnica produz estimadores não-consistentes no sentido fraco.
- ④ Se  $W'_t = (y_t, x_t)$  e  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ , então o preditor ótimo (que minimiza o erro médio quadrático) de  $W_{n+1}$ , dados  $W_1 = \omega_1, \dots, W_n = \omega_n$ , é  $A\omega_n$  e a matriz de variância do erro de previsão é  $A\Omega A'$ .
- ⑤ Considerando a regressão de  $y_t$  em  $y_{t-1}$  e  $x_{t-1}$ , no contexto da representação vetorial do processo auto-regressivo de primeira ordem, se o coeficiente de  $x_{t-1}$  nessa regressão não for significativo, então pode-se afirmar corretamente que a variável  $x$  não causa  $y$ , no sentido de Granger.

**QUESTÃO 49**

Considere  $X$  um vetor aleatório cuja distribuição  $P_\theta$  é conhecida a menos de um parâmetro real  $\theta$ ,  $T = T(X)$  uma estatística suficiente e  $\delta = \delta(X)$  um estimador de  $\theta$  com  $E_\theta[L(\theta, \delta(X))] < \infty$ , em que  $L(\theta, d)$  é uma função perda, estritamente convexa, e  $E_\theta$  denota a esperança com respeito à distribuição  $P_\theta$ . Um dos resultados fundamentais na teoria de estimação é o teorema de Rao-Blackwell, que estabelece, no contexto acima, que  $\eta = \eta(X)$ , definido por  $\eta(x) = E_\theta[\delta(X) | T = T(x)]$ , é um estimador de  $\theta$  tal que, para todo  $\theta$ ,

$$E_\theta[L(\theta, \eta)] \leq E_\theta[L(\theta, \delta)]. \quad (I)$$

Em algumas aplicações desse teorema, utiliza-se a hipótese adicional da estatística suficiente  $T$  ser completa, o que significa que, se  $g$  é mensurável e  $E_\theta[g(T)] \equiv 0$ , então  $P_\theta(g(T) = 0) \equiv 1$ .

Com relação à situação descrita, julgue os seguintes itens.

- ① Se a estatística  $T$  é minimal suficiente, então  $T$  é uma estatística completa.
- ② Mesmo quando  $\delta$  for um estimador não-viesado, é possível que  $\eta$  seja viesado.
- ③ No caso particular em que  $L(\theta, d) = (\theta - d)^2$ , a relação I permite concluir que  $\text{Var}_\theta(\eta) \leq \text{Var}_\theta(\delta)$ , para todo  $\theta$ .
- ④ Só pode ocorrer igualdade na relação I quando existe uma função mensurável  $h$  tal que  $P_\theta[\delta(X) = h(T(X))] \equiv 1$ .
- ⑤ Acrescentando às hipóteses do teorema de Rao-Blackwell a hipótese de que a estatística suficiente  $T$  seja completa, será possível concluir que existe um estimador não-viesado de variância mínima para  $\theta$ .

**RASCUNHO**

Uma empresa está interessada em estudar o efeito da distribuição de cupons de desconto nas vendas de um certo produto. Desse modo, para cada nível de desconto  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , são escolhidas  $n$  famílias ao acaso que recebem, cada uma, um cupom de desconto de  $x_i$  reais. Algum tempo depois, determina-se o número de cupons utilizados,  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Considere que  $\pi_i$  seja a probabilidade de que um cupom de nível  $x_i$  seja utilizado. Considere também os dois modelos estatísticos seguintes para o ajuste dos dados dessa situação típica de resposta binária:

$$E\left(\frac{r_i}{n}\right) = \alpha + \beta x_i, \text{ para } i = 1, \dots, p; \quad (\text{I})$$

$$E\left(\frac{r_i}{n}\right) = F(\alpha + \beta x_i), \text{ para } i = 1, \dots, p. \quad (\text{II})$$

Nas expressões acima,  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros e  $F(y)$  é uma função de distribuição de probabilidades conhecida. Com base nessa situação hipotética, julgue os itens a seguir.

- ① Em ambos os modelos, a variância do erro independe de  $x_i$ , pois o número de famílias escolhido para cada  $i$  é o mesmo.
- ② Considerando o modelo II e supondo que  $n$  seja grande o suficiente para que o quociente  $r_i/n$  esteja próximo de  $\pi_i$  e tenha distribuição essencialmente normal, então o desenvolvimento de Taylor de  $f(y) = F^{-1}(y)$ , em uma vizinhança de  $\pi_i$ , produzirá a aproximação linear  $f(r_i/n) = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ , com erros normais e homocedásticos.
- ③ Considerando o modelo II, com  $n$  suficientemente grande e  $F(x) = e^x / (1 + e^x)$ , como sendo a função de distribuição da logística, então a aproximação linear induzida nesse modelo por  $F(x)$  tem a forma

$$\ln \left( \frac{r_i/n}{1 - r_i/n} \right) = \alpha + \beta x_i + u_i,$$

em que cada  $u_i$  tem distribuição normal e variância igual a  $[n\pi_i(1 - \pi_i)]^{-1}$ .

- ④ Considerando o modelo II, o estimador de máxima verossimilhança de  $(\alpha, \beta)'$  é obtido calculando-se o máximo da função

$$\prod_{i=1}^p \binom{n}{r_i} [F(\alpha + \beta x_i)]^{r_i} [1 - F(\alpha + \beta x_i)]^{n-r_i}.$$

- ⑤ Considerando o modelo I, a fórmula clássica  $s^2(X'X)^{-1}$ , em que  $X' = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_p \end{pmatrix}$ ,  $s^2 = \frac{1}{p-2} \sum_{i=1}^p \left( \frac{r_i}{n} - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i \right)^2$  e  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$  são os estimadores do método de mínimos quadrados ordinários, produz uma estimativa viesada para a variância do estimador de mínimos quadrados do vetor  $(\alpha, \beta)'$ .