ETAPA

MATEMÁTICA

Principais notações

$\boldsymbol{R}$ – o conjunto de todos os números reais

$[a, b] = \{x \in \boldsymbol{R} : a \leq x \leq b\}$

$]a, b[= \{x \in \boldsymbol{R} : a < x < b\}$

(a, b) – par ordenado

gof – função composta de g e f

A^{-1} – matriz inversa da matriz A

A^T – matriz transposta da matriz A

$\det(A)$ – determinante da matriz A

As questões de **01 a 15 não devem ser resolvidas no caderno de respostas.** Para respondê-las, marque a opção escolhida para cada questão na **folha de leitura óptica** e na **folha de respostas** (que se encontra na última página do caderno de respostas).

Questão 1

Sejam $f, g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ definidas por $f(x) = x^3$ e $g(x) = 10^{3\cos 5x}$. Podemos afirmar que

a) f é injetora e par e g é ímpar.

b) g é sobrejetora e gof é par.

c) f é bijetora e gof é ímpar.

d) g é par e gof é ímpar.

e) f é ímpar e gof é par.

alternativa E

Como, para todo $x \in R$, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, f é ímpar.

Temos que, para todo $x \in R$, $g(x) = 10^{3\cos 5x} > 0$. Logo g não é sobrejetora.

Finalmente, $gof : R \to R$, $gof(x) = g(f(x)) = g(x^3) = 10^{3\cos 5x^3}$ e, portanto, $gof(-x) = 10^{3\cos 5(-x)^3} = 10^{3\cos(-5x^3)} = 10^{3\cos 5x^3} = gof(x)$, isto é, gof é par.

Assim, podemos afirmar que f é ímpar e gof é par.

Questão 2

Denotemos por $n(X)$ o número de elementos de um conjunto finito X. Sejam A, B e C conjuntos tais que $n(A \cup B) = 8$, $n(A \cup C) = 9$, $n(B \cup C) = 10$, $n(A \cup B \cup C) = 11$ e $n(A \cap B \cap C) = 2$. Então, $n(A) + n(B) + n(C)$ é igual a

a) 11. b) 14. c) 15. d) 18. e) 25.

alternativa D

Temos

$n(A \cup B) = 8 \Leftrightarrow n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 8 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n(A \cap B) = n(A) + n(B) - 8$

Da mesma forma,

$n(A \cup C) = 9 \Leftrightarrow n(A \cap C) = n(A) + n(C) - 9$ e

$n(B \cup C) = 10 \Leftrightarrow n(B \cap C) = n(B) + n(C) - 10.$

Como $n(A \cup B \cup C) = 11$ e $n(A \cap B \cap C) = 2$, concluímos que $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \Leftrightarrow 11 = n(A) + n(B) + n(C) - (n(A) + n(B) - 8) - (n(A) + n(C) - 9) - (n(B) + n(C) - 10) + 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n(A) + n(B) + n(C) = 18$

Questão 3

Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{20} \frac{20!}{n!(20-n)!} x^n$ uma função real de variável real em que $n!$ indica o fatorial de n. Considere as afirmações:

I. $f(1) = 2$.

II. $f(-1) = 0$.

III. $f(-2) = 1$.

Podemos concluir que

a) Somente as afirmações I e II são verdadeiras.

b) Somente as afirmações II e III são verdadeiras.

c) Apenas a afirmação I é verdadeira.

d) Apenas a afirmação II é verdadeira.

e) Apenas a afirmação III é verdadeira.

alternativa B

Temos $f(x) = \sum_{n=0}^{20} \dfrac{20!}{n!(20-n)!} \cdot x^n =$

$= \sum_{n=0}^{20} \binom{20}{n} \cdot 1^{20-n} \cdot x^n =$

$= (1+x)^{20}$, $f: R \to R$.

Logo

I. Falsa. $f(1) = (1+1)^{20} = 2^{20}$.

II. Verdadeira. $f(-1) = (1+(-1))^{20} = 0$.

III. Verdadeira. $f(-2) = (1+(-2))^{20} = 1$.

Questão 4

Quantos números de seis algarismos distintos podemos formar usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes, mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes?

a) 144. b) 180. c) 240.
d) 288. e) 360.

alternativa A

Podemos formar 2! 5! números de seis algarismos distintos nos quais o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes. Podem ainda ser formados 2! 2! 4! números que, além das condições acima, também tenham o 1 e o 2 ocupando posições adjacentes.
Logo o total de números nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes, mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes é $2!\,5! - 2!\,2!\,4! = 144$.

Questão 5

Sendo 1 e $1 + 2i$ raízes da equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais, então

a) $b + c = 4$. b) $b + c = 3$. c) $b + c = 2$.
d) $b + c = 1$. e) $b + c = 0$.

alternativa C

Como os coeficientes da equação polinomial são reais e ela admite a raiz $1 + 2i$, *então admite também a raiz conjugada* $\overline{1 + 2i} = 1 - 2i$, *ou seja, as raízes da equação são* 1, $1 + 2i$ *e* $1 - 2i$.

Das relações entre coeficientes e raízes,

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{b}{1} = 1 \cdot (1+2i) + 1 \cdot (1-2i) + (1+2i) \cdot (1-2i) \\ -\dfrac{c}{1} = 1 \cdot (1+2i) \cdot (1-2i) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} b = 7 \\ c = -5 \end{array}\right.$$

Portanto $b + c = 7 + (-5) = 2$.

Questão 6

A soma das raízes reais positivas da equação $4^{x^2} - 5 \cdot 2^{x^2} + 4 = 0$ vale

a) 2. b) 5. c) $\sqrt{2}$. d) 1. e) $\sqrt{3}$.

alternativa C

$$4^{x^2} - 5 \cdot 2^{x^2} + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2^{x^2}\right)^2 - 5 \cdot 2^{x^2} + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2^{x^2} = y \\ y^2 - 5y + 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2^{x^2} = y \\ (y = 1 \text{ ou } y = 4) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2^{x^2} = 1 = 2^0 \\ \quad \text{ou} \\ 2^{x^2} = 4 = 2^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ \quad \text{ou} \\ x^2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = 0 \\ \quad \text{ou} \\ x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Assim, a soma das raízes reais positivas da equação é $\sqrt{2}$.

Questão 7

Sendo I um intervalo de números reais com extremidades em a e b, com $a < b$, o número real $b - a$ é chamado de comprimento de I.
Considere a inequação

$$6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x < 0.$$

A soma dos comprimentos dos intervalos nos quais ela é verdadeira é igual a

a) $\dfrac{3}{4}$. b) $\dfrac{3}{2}$. c) $\dfrac{7}{3}$. d) $\dfrac{11}{6}$. e) $\dfrac{7}{6}$.

alternativa D

Seja $p(x) = 6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x =$
$= x(6x^3 - 5x^2 - 7x + 4)$.

Como $p(-1) = 0$, *dividamos* $6x^3 - 5x^2 - 7x + 4$ *por* $x - (-1) = x + 1$,

$$\begin{array}{c|ccc|c} -1 & 6 & -5 & -7 & 4 \\ \hline & 6 & -11 & 4 & 0 \end{array}$$

Assim $p(x) = x \cdot (x + 1)(6x^2 - 11x + 4)$ *e*
$6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x(x + 1)(6x^2 - 11x + 4) < 0$.
Sendo $A(x) = x$, $B(x) = x + 1$ *e*
$C(x) = 6x^2 - 11x + 4$, $C(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ *ou*
$x = \frac{4}{3}$, *e estudando o sinal de* $A \cdot B \cdot C$, *obtemos:*

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < \frac{4}{3}$	$x > \frac{4}{3}$
A	−	−	+	+	+
B	−	+	+	+	+
C	+	+	+	−	+
A . B . C	+	−	+	−	+

Assim a soma dos comprimentos dos intervalos nos quais a inequação é verdadeira é igual a $(0 - (-1)) + \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{11}{6}$.

Questão 8

Seja $S = [-2, 2]$ e considere as afirmações:

I. $\frac{1}{4} \le \left(\frac{1}{2}\right)^x < 6$, para todo $x \in S$.

II. $\frac{1}{\sqrt{32 - 2^x}} < \frac{1}{\sqrt{32}}$, para todo $x \in S$.

III. $2^{2x} - 2^x \le 0$, para todo $x \in S$.

Então, podemos dizer que
a) apenas I é verdadeira.
b) apenas III é verdadeira.
c) somente I e II são verdadeiras.
d) apenas II é falsa.
e) todas as afirmações são falsas.

alternativa A

I. Verdadeira. *Temos* $-2 \le x \le 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \ge \left(\frac{1}{2}\right)^x \ge \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le \left(\frac{1}{2}\right)^x \le 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{4} \le \left(\frac{1}{2}\right)^x < 6$.

II. Falsa. *Por exemplo, se* $x = 2 \in S$,
$\frac{1}{\sqrt{32 - 2^x}} = \frac{1}{\sqrt{32 - 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{28}} > \frac{1}{\sqrt{32}}$.

III. Falsa. *Por exemplo, se* $x = 2 \in S$,
$2^{2x} - 2^x = 2^{2 \cdot 2} - 2^2 = 16 - 4 > 0$.

Questão 9

Seja z_0 o número complexo $1 + i$. Sendo S o conjunto solução no plano complexo de $|z - z_0| = |z + z_0| = 2$, então o produto dos elementos de S é igual a

a) $4(1 - i)$. b) $2(1 + i)$. c) $2(i - 1)$.
d) $-2i$. e) $2i$.

alternativa E

As medidas das diagonais do paralelogramo de lados adjacentes $z - 0$ *e* $z_0 - 0$ *são* $|z - z_0|$ *e* $|z + z_0|$. *Como* $|z_0 - 0| = |z_0| = \sqrt{2}$ *é a medida de um dos lados do paralelogramo e* $|z - z_0| =$
$= |z + z_0| = 2$, *então* $|z - z_0| = |z + z_0| = |z_0|\sqrt{2}$ *e, portanto, o paralelogramo é um quadrado.*
Assim, as soluções de $|z - z_0| = |z + z_0| = 2$ *são obtidas de* z_0 *por rotação de centro na origem e ângulos de* 90^o *e* -90^o, *ou seja, são* iz_0 *e* $-iz_0$, *cujo produto é* $(iz_0)(-iz_0) = z_0^2 = (1 + i)^2 = 2i$.

Questão 10

Considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) =$
$= 2 \operatorname{sen} 3x - \cos\left(\frac{x - \pi}{2}\right)$. Sobre f podemos afirmar que:
a) é uma função par.
b) é uma função ímpar e periódica de período fundamental 4π.

c) é uma função ímpar e periódica de período fundamental $4\pi/3$.
d) é uma função periódica de período fundamental 2π.
e) não é par, não é ímpar e não é periódica.

alternativa B

Como $\cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = \operatorname{sen}\frac{x}{2}$, *temos:* $f(x) = 2\operatorname{sen} 3x - \cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right) =$

$= 2\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen}\frac{x}{2}$. *Para todo* $x \in R$, $f(-x) =$

$= 2\operatorname{sen} 3(-x) - \operatorname{sen}\left(\frac{-x}{2}\right) = -2\operatorname{sen} 3x +$

$+ \operatorname{sen}\frac{x}{2} = -f(x)$, *ou seja,* f *é ímpar. Os períodos de* $2\operatorname{sen} 3x$ *e* $\operatorname{sen}\frac{x}{2}$ *são, respectivamente,* $\frac{2\pi}{3}$ *e*

$\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$. *Como* $4\pi = 6\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, f *é periódica de período fundamental* 4π.

Questão 11

O valor de n que torna a seqüência

$$2 + 3n, -5n, 1 - 4n$$

uma progressão aritmética pertence ao intervalo

a) $[-2, -1]$. b) $[-1, 0]$. c) $[0, 1]$.
d) $[1, 2]$. e) $[2, 3]$.

alternativa B

A seqüência dada é progressão aritmética se, e somente se,

$2 + 3n + 1 - 4n = 2 \cdot (-5n) \Leftrightarrow n = -\frac{1}{3}$.

Como $-1 \le -\frac{1}{3} \le 0$, $n \in [-1, 0]$.

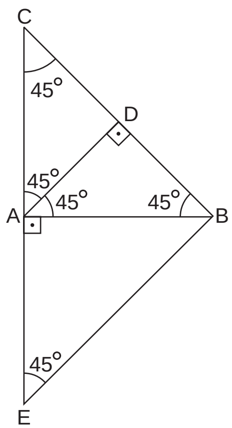
Questão 12

Considere um triângulo isósceles ABC, retângulo em A. Seja D a intersecção da bissetriz do ângulo $\hat{A}$ com o lado $\overline{BC}$ e E um ponto da reta suporte do cateto $\overline{AC}$ de tal modo que os segmentos de reta $\overline{BE}$ e $\overline{AD}$ sejam paralelos. Sabendo que $\overline{AD}$ mede $\sqrt{2}\ cm$, então a área do círculo inscrito no triângulo EBC é

a) $\pi(4 - 2\sqrt{3})\ cm^2$. b) $2\pi(3 - 2\sqrt{2})\ cm^2$.
c) $3\pi(4 - 2\sqrt{3})\ cm^2$. d) $4\pi(3 - 2\sqrt{2})\ cm^2$.
e) $\pi(4 - 2\sqrt{2})\ cm^2$.

alternativa D

Como ABC é um triângulo isósceles, retângulo em A, temos que $m(A\hat{C}B) = m(A\hat{B}C) = 45^o$. $\overline{AD}$ *é bissetriz de* $B\hat{A}C$, *logo* $m(C\hat{A}D) = m(B\hat{A}D) = 45^o$. *Como* $\overline{BE}$ *é paralelo a* $\overline{AD}$, $m(C\hat{E}B) = m(C\hat{A}D) =$ $= 45^o$.



Temos $AC = AB = AE = AD\sqrt{2} = 2$ *cm*,
$BE = BC = AC\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ *cm e* $EC = 2AC = 4$ *cm*.
Assim, o semiperímetro do triângulo BCE é
$\frac{BC + BE + EC}{2} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 4}{2} = 2\sqrt{2} + 2$ *cm*
e sua área é $\frac{CE \cdot AB}{2} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4\ cm^2$.
Portanto o raio da circunferência inscrita no triângulo EBC é $\frac{4}{2\sqrt{2} + 2} = 2(\sqrt{2} - 1)$ *cm e sua área*
$\pi(2(\sqrt{2} - 1))^2 = 4\pi(3 - 2\sqrt{2})\ cm^2$.

Questão 13

A área de um triângulo é de 4 unidades de superfície, sendo dois de seus vértices os pontos $A: (2, 1)$ e $B: (3, -2)$. Sabendo que o terceiro vértice encontra-se sobre o eixo das abcissas, pode-se afirmar que suas coordenadas são

a) $(-1/2, 0)$ ou $(5, 0)$.
b) $(-1/2, 0)$ ou $(4, 0)$.
c) $(-1/3, 0)$ ou $(5, 0)$.
d) $(-1/3, 0)$ ou $(4, 0)$.
e) $(-1/5, 0)$ ou $(3, 0)$.

alternativa C

Seja $C = (x; 0)$ o terceiro vértice. Assim, podemos escrever:

$$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}\right| = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}|x-4-3+2x| = 4 \Leftrightarrow |3x-7| = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 5 \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{array} \right.$$

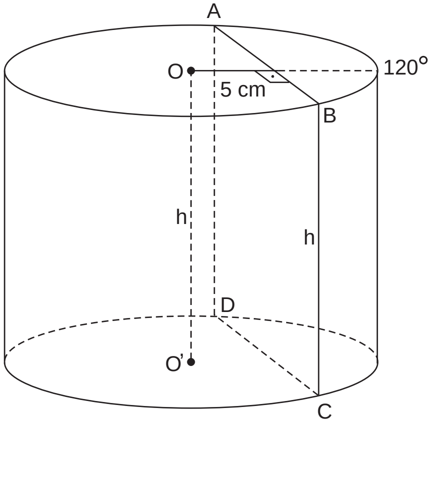
Logo $C = (5; 0)$ ou $C = \left(-\dfrac{1}{3}; 0\right)$.

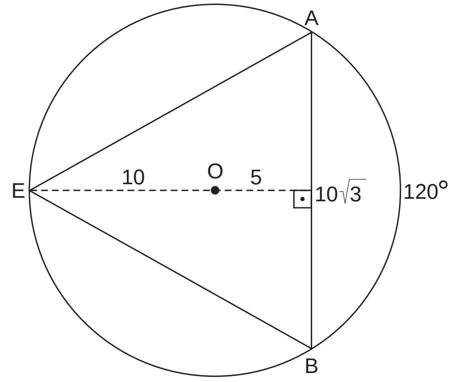
Questão 14

Um cilindro circular reto é seccionado por um plano paralelo ao seu eixo. A secção fica a 5 cm do eixo e separa na base um arco de 120^o. Sendo de $30\sqrt{3}\ cm^2$ a área da secção plana retangular, então o volume da parte menor do cilindro seccionado mede, em cm^3,

a) $30\pi - 10\sqrt{3}$.
b) $30\pi - 20\sqrt{3}$.
c) $20\pi - 10\sqrt{3}$.
d) $50\pi - 25\sqrt{3}$.
e) $100\pi - 75\sqrt{3}$.

alternativa E





Nas figuras, a secção é o retângulo ABCD, cujos lados são a altura do cilindro e a corda $\overline{AB}$ correspondente a um arco de 120^o na circunferência da base. Essa corda é o lado do triângulo equilátero ABE, inscrito na circunferência. Como o apótema desse triângulo (distância do centro aos lados) mede 5 cm, concluímos que o raio da circunferência mede 10 cm, e o lado do triângulo equilátero inscrito mede, portanto, $10\sqrt{3}$ cm. Sendo h a altura do cilindro, a área da secção vale $10\sqrt{3}\ .\ h =$
$= 30\sqrt{3} \Leftrightarrow h = 3$ cm.
O volume pedido é o produto da área do segmento circular de raio 10 cm e ângulo 120^o pela altura do cilindro, ou seja,

$$\left(\frac{120^o}{360^o} \cdot \pi \cdot 10^2 - \frac{10^2 \cdot \text{sen } 120^o}{2}\right) \cdot 3 =$$
$$= 100\pi - 75\sqrt{3}\ cm^3.$$

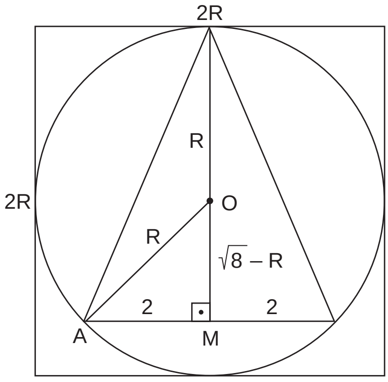
Questão 15

Um cone circular reto com altura de $\sqrt{8}\ cm$ e raio da base de 2 cm está inscrito numa esfera que, por sua vez, está inscrita num cilindro. A razão entre as áreas das superfícies totais do cilindro e do cone é igual a

a) $\dfrac{3}{2}(\sqrt{2} - 1)$.
b) $\dfrac{9}{4}(\sqrt{2} - 1)$.
c) $\dfrac{9}{4}(\sqrt{6} - 1)$.
d) $\dfrac{27}{8}(\sqrt{3} - 1)$.
e) $\dfrac{27}{16}(\sqrt{3} - 1)$.

alternativa D

Um plano contendo o eixo do cilindro determina a secção representada na figura a seguir.



No triângulo retângulo OAM, temos

$R^2 = 2^2 + (\sqrt{8} - R)^2 \Leftrightarrow R = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ *cm.*

A área da superfície total do cilindro é

$2 \cdot \pi R^2 + 2\pi R \cdot 2R = 6\pi R^2 = 6\pi \left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 =$

$= 27\pi\ cm^2.$

A geratriz do cone é $\sqrt{2^2 + (\sqrt{8})^2} = 2\sqrt{3}$ *cm. Assim, a área da superfície total do cone é*

$\pi \cdot 2^2 + \pi \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\pi(\sqrt{3} + 1)\ cm^2.$

A razão entre as duas áreas, na ordem apresentada, é $\dfrac{27\pi}{4\pi(\sqrt{3} + 1)} = \dfrac{27}{8}(\sqrt{3} - 1).$

Questão 16

Duas retas r_1 e r_2 são paralelas à reta $3x - y = 37$ e tangentes à circunferência $x^2 + y^2 - 2x - y = 0$. Se d_1 é a distância de r_1 até a origem e d_2 é a distância de r_2 até a origem, então $d_1 + d_2$ é igual a

a) $\sqrt{12}$. b) $\sqrt{15}$. c) $\sqrt{7}$. d) $\sqrt{10}$. e) $\sqrt{5}$.

alternativa E

Temos que r_1 *e* r_2 *são tangentes à circunferência de centro* $C = \left(1; \dfrac{1}{2}\right)$ *e raio* $\sqrt{1^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Como a origem pertence à circunferência, $d_1 + d_2$ *é igual à distância entre* r_1 *e* r_2*, ou seja, é igual ao diâmetro da circunferência. Logo* $d_1 + d_2 = \sqrt{5}$.

Questão 17

Sabe-se que x é um número real pertencente ao intervalo $]0, 2\pi[$ e que o triplo da sua secante, somado ao dobro da sua tangente, é igual a 3. Então, o cosseno de x é igual a

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. b) $\dfrac{2}{7}$. c) $\dfrac{5}{13}$. d) $\dfrac{15}{26}$. e) $\dfrac{13}{49}$.

alternativa C

Temos

$3 \sec x + 2\,\text{tg}\, x = 3 \Leftrightarrow \dfrac{3}{\cos x} + 2\dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x} = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\cos x - 2\,\text{sen}\, x = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{\sqrt{13}}\cos x - \dfrac{2}{\sqrt{13}}\,\text{sen}\, x = \dfrac{3}{\sqrt{13}}.$

Seja $\alpha = \text{arc cos}\, \dfrac{3}{\sqrt{13}}$. *Então* $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$ *e* $\text{sen}\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$. *Portanto*

$\cos\alpha \cdot \cos x - \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\, x = \cos\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(x + \alpha) = \cos\alpha \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -2\alpha + 2k\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

Como $0 < x < 2\pi$, *concluímos que* $x = 2\pi - 2\alpha$.

Logo $\cos x = \cos(2\pi - 2\alpha) = \cos 2\alpha =$

$= 2\cos^2\alpha - 1 = 2\left(\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 - 1 = \dfrac{18}{13} - 1 = \dfrac{5}{13}$.

Questão 18

Seja $P(x)$ um polinômio divisível por $x - 1$. Dividindo-o por $x^2 + x$, obtêm-se o quociente $Q(x) = x^2 - 3$ e o resto $R(x)$. Se $R(4) = 10$, então o coeficiente do termo de grau 1 de $P(x)$ é igual a

a) -5. b) -3. c) -1. d) 1. e) 3.

alternativa C

Como $P(x)$ *é divisível por* $x - 1$, $P(1) = 0$.

Temos

$P(x) = (x^2 - 3) \cdot (x^2 + x) + R(x)$, *onde*

$R(x) = ax + b$, $a, b \in R$.

Assim, $\left|\begin{matrix} P(1)=0 \\ R(4)=10 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} -4+a+b=0 \\ 4a+b=10 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|\begin{matrix} a=2 \\ b=2 \end{matrix}\right.$

Logo $R(x)=2x+2$ *e* $P(x)=$

$=(x^2-3)\,.\,(x^2+x)+2x+2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(x)=x^4+x^3-3x^2-x+2.$

Então o coeficiente do termo de grau 1 de P(x) é -1.

Questão 19

Considere as matrizes

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Se X é solução de $M^{-1}\ NX = P$, então $x^2+y^2+z^2$ é igual a

a) 35. b) 17. c) 38. d) 14. e) 29.

alternativa A

Temos $M^{-1}NX=P \Leftrightarrow NX=MP \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{matrix} x+2z=-1 \\ 3x+2y=1 \\ x+y+z=3 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} x=-3 \\ y=5 \\ z=1 \end{matrix}\right.$$

Logo $x^2+y^2+z^2=(-3)^2+5^2+1^2=35.$

Questão 20

Sendo x um número real positivo, considere as matrizes

$$A=\begin{pmatrix} \log_{1/3} x & \log_{1/3} x^2 & 1 \\ 0 & -\log_3 x & 1 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & \log_{1/3} x^2 \\ 1 & 0 \\ -3\log_{1/3} x & -4 \end{pmatrix}.$$

A soma de todos os valores de x para os quais $(AB)=(AB)^T$ é igual a

a) $\frac{25}{3}$. b) $\frac{28}{3}$. c) $\frac{32}{3}$.

d) $\frac{27}{2}$. e) $\frac{25}{2}$.

alternativa B

Seja $AB=C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$. *Temos*

$AB=(AB)^T \Leftrightarrow C=C^T \Leftrightarrow c_{12}=c_{21} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} x\,.\,\log_{\frac{1}{3}} x^2+\log_{\frac{1}{3}} x^2\,.\,0+1\,.\,(-4)=$

$=0\,.\,0+(-\log_3 x)\,.\,1+1\,.\,(-3\log_{\frac{1}{3}} x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\,.\,(\log_{\frac{1}{3}} x)^2-4=\log_{\frac{1}{3}} x-3\log_{\frac{1}{3}} x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\log_{\frac{1}{3}} x)^2+(\log_{\frac{1}{3}} x)-2=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{matrix} \log_{\frac{1}{3}} x=-2 \\ \text{ou} \\ \log_{\frac{1}{3}} x=1 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} x=9 \\ \text{ou} \\ x=\frac{1}{3} \end{matrix}\right.$$

A soma dos valores de x é $9+\frac{1}{3}=\frac{28}{3}$.

Questão 21

Considere as matrizes reais

$$M=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ e } I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $a \neq 0$ e a, b e c formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q>0$. Sejam λ_1, λ_2 e λ_3 as raízes da equação det $(M - \lambda I) = 0$. Se

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = a \text{ e } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 7a,$$

então $a^2 + b^2 + c^2$ é igual a

a) $\frac{21}{8}$. b) $\frac{91}{9}$. c) $\frac{36}{9}$.

d) $\frac{21}{16}$. e) $\frac{91}{36}$.

alternativa A

Temos $\det(M - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & b-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & c-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda = a$ *ou* $\lambda = b$ *ou* $\lambda = c$.

Como a, b e c formam, nessa ordem, uma PG de razão $q > 0$, *com* $a \neq 0$, $b = aq$ *e* $c = aq^2$.

$$\text{Assim } \left| \begin{array}{l} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = a \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 7a \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a \cdot aq \cdot aq^2 = a \\ a + aq + aq^2 = 7a \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a^2q^3 = 1 \\ q^2 + q - 6 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a^2 = \frac{1}{8} \\ q = 2 \end{array} \right.$$

Logo $a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (aq)^2 + (aq^2)^2 =$

$= a^2(1 + q^2 + q^4) = \frac{1}{8}(1 + 4 + 16) = \frac{21}{8}$.

Questão 22

Num triângulo acutângulo ABC, o lado oposto ao ângulo $\hat{A}$ mede 5 cm. Sabendo que

$$\hat{A} = \arccos\frac{3}{5} \quad \text{e} \quad \hat{C} = \operatorname{arcsen}\frac{2}{\sqrt{5}},$$

então a área do triângulo ABC é igual a

a) $\frac{5}{2}\ cm^2$.

b) $12\ cm^2$.

c) $15\ cm^2$.

d) $2\sqrt{5}\ cm^2$.

e) $\frac{25}{2}\ cm^2$.

alternativa E

Temos que

$\cos\hat{A} = \frac{3}{5}$, $\operatorname{sen}\hat{A} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$,

$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\hat{C} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ *e,*

portanto, $\operatorname{sen}\hat{B} = \operatorname{sen}(\pi - (\hat{A} + \hat{C})) =$

$= \operatorname{sen}(\hat{A} + \hat{C}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Pela lei dos senos,

$$\frac{AB}{\operatorname{sen}\hat{C}} = \frac{BC}{\operatorname{sen}\hat{A}} \Leftrightarrow \frac{AB}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{5}{\frac{4}{5}} \Leftrightarrow AB = \frac{25}{2\sqrt{5}}\ cm.$$

A área do triângulo ABC é igual a:

$$\frac{AB \cdot BC \cdot \operatorname{sen}\hat{B}}{2} = \frac{\frac{25}{2\sqrt{5}} \cdot 5 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{25}{2}\ cm^2.$$

Questão 23

Considere a circunferência inscrita num triângulo isósceles com base de 6 cm e altura de 4 cm. Seja t a reta tangente a esta circunferência e paralela à base do triângulo. O segmento de t compreendido entre os lados do triângulo mede

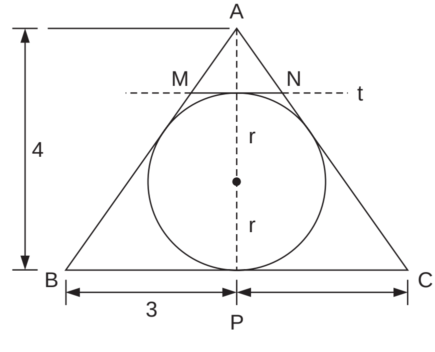
a) 1 cm. b) 1,5 cm. c) 2 cm.

d) 2,5 cm. e) 3 cm.

alternativa B

No desenho temos $AB = AC$ *e* $BC = 6$.

Sendo P o ponto médio de $\overline{BC}$, *temos* $BP = 3$. *Como o triângulo é isósceles, então a altura é* $AP = 4$, *e por Pitágoras, temos* $AB = AC = 5$.



Logo o raio da circunferência inscrita é

$$r = \frac{\text{área } \Delta ABC}{\text{semiperímetro } \Delta ABC} = \frac{\frac{6\,.\,4}{2}}{\frac{6+5+5}{2}} = \frac{3}{2}.$$

A reta t *determina o triângulo AMN semelhante ao triângulo ABC, pois $\overline{MN} // \overline{BC}$. A altura do triângulo AMN, relativa à base $\overline{MN}$, é $4 - 2r = 4 - 3 = 1$.*

Portanto $\frac{MN}{1} = \frac{6}{4} \Leftrightarrow MN = 1{,}5$ *cm.*

Questão 24

Considere uma pirâmide regular com altura de $\frac{6}{\sqrt[3]{9}}$ *cm*. Aplique a esta pirâmide dois cortes planos e paralelos à base de tal maneira que a nova pirâmide e os dois troncos obtidos tenham, os três, o mesmo volume. A altura do tronco cuja base é a base da pirâmide original é igual a

a) $2\left(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6}\right)cm$.

b) $2\left(\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{2}\right)cm$.

c) $2\left(\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{3}\right)cm$.

d) $2\left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right)cm$.

e) $2\left(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}\right)cm$.

alternativa D

Sendo V o volume da pirâmide original, o volume do tronco cuja base é a base da pirâmide original é $\frac{V}{3}$ *e o da pirâmide que se obtém retirando-se esse tronco da pirâmide original é* $V - \frac{V}{3} = \frac{2V}{3}$.

A partir da semelhança das duas pirâmides, sendo h *a altura pedida, temos:*

$$\left(\frac{\frac{6}{\sqrt[3]{9}} - h}{\frac{6}{\sqrt[3]{9}}}\right)^3 = \frac{\frac{2V}{3}}{V} \Leftrightarrow \frac{\frac{6}{\sqrt[3]{9}} - h}{\frac{6}{\sqrt[3]{9}}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h = 2\left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right) \text{ cm.}$$

Questão 25

Para x no intervalo $[0, \pi/2]$, o conjunto de todas as soluções da inequação

$$\text{sen}\,(2x) - \text{sen}\,(3x + \frac{\pi}{2}) > 0$$

é o intervalo definido por

a) $\frac{\pi}{10} < x < \frac{\pi}{2}$.

b) $\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}$.

c) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$.

d) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$.

e) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$.

alternativa A

Para x *no intervalo* $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\text{sen } 2x - \text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\,\text{sen}\left(\frac{-x - \frac{\pi}{2}}{2}\right).\cos\left(\frac{5x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\,\text{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) < 0 \; (*)$$

Como $\frac{\pi}{4} \le \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{2}$ *e* $\frac{\pi}{4} \le \frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4} \le \frac{3\pi}{2}$, *então* $\text{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 0$ *e* $(*) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) < 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{5x}{2} < \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{10} < x < \frac{\pi}{2}.$$