Matemática

ITA

ETAPA

NOTAÇÕES

C é o conjunto dos números complexos.
R é o conjunto dos números reais.
N = {1, 2, 3,...}.
i denota a unidade imaginária, ou seja, $i^2 = -1$.
$\bar{z}$ é o conjugado do número complexo z.
Se X é um conjunto, $P(X)$ denota o conjunto de todos os subconjuntos de X.
$A \setminus B = \{x \in A \ ; \ x \notin B\}$.
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ a \leq x \leq b\}$.
$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ a \leq x\}$.
$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ x \leq a\}$.
$P = (x, y)$ significa ponto P de coordenadas (x, y).
$\overline{AB}$ denota o segmento que une os pontos A e B.
$ln\, x$ denota o logaritmo natural de x.
A^t denota a matriz transposta da matriz A.

Questão 1

Considere as seguintes afirmações sobre números reais positivos:

I. Se $x > 4$ e $y < 2$, então $x^2 - 2y > 12$.

II. Se $x > 4$ ou $y < 2$, então $x^2 - 2y > 12$.

III. Se $x^2 < 1$ e $y^2 > 2$, então $x^2 - 2y < 0$.

Então, destas é (são) verdadeira(s)

a) apenas I.
b) apenas I e II.
c) apenas II e III.
d) apenas I e III.
e) todas.

alternativa D

I. Verdadeira, pois $x > 4$ e $y < 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 > 16$ e $-2y > -4 \Rightarrow x^2 - 2y > 16 - 4 = 12$.
II. Falsa, pois, por exemplo, para $x = 5$ e $y = 7$ temos que a sentença ($x > 4$ ou $y < 2$) é verdadeira, enquanto $x^2 - 2y > 12$ é falsa.
III. Verdadeira, pois, sendo x, y positivos, temos $x^2 < 1$ e $y^2 > 2 \Leftrightarrow x^2 < 1$ e $y > \sqrt{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 2y < 1 - 2\sqrt{2} \Rightarrow x^2 - 2y < 0$.
Portanto somente as afirmações I e III são verdadeiras.

Questão 2

Sejam a, b, c reais não-nulos e distintos, $c > 0$. Sendo par a função dada por

$$f(x) = \frac{ax + b}{x + c}, \ -c < x < c,$$

então $f(x)$, para $-c < x < c$, é constante e igual a

a) $a + b$.
b) $a + c$.
c) c.
d) b.
e) a.

alternativa E

$f(x)$ é par se, e somente se, para todo x, $-c < x < c$,

$$f(-x) = f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a \cdot (-x) + b}{-x + c} = \frac{ax + b}{x + c} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -ax^2 + (b - ac)x + bc =$$

$$= -ax^2 + (ac - b)x + bc \Leftrightarrow b = ac$$

Logo, para $-c < x < c$, $f(x) = \dfrac{ax + ac}{x + c} = a$.

Questão 3

Os valores de $x \in \mathbb{R}$, para os quais a função real dada por $f(x) = \sqrt{5 - ||2x - 1| - 6|}$ está definida, formam o conjunto

a) $[0, 1]$.
b) $[-5, 6]$.
c) $[-5, 0] \cup [1, \infty)$.
d) $(-\infty, 0] \cup [1, 6]$.
e) $[-5, 0] \cup [1, 6]$.

alternativa E

$$f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sqrt{5 - ||2x - 1| - 6|} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 - ||2x - 1| - 6| \geq 0 \Leftrightarrow ||2x - 1| - 6| \leq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5 \leq |2x - 1| - 6 \leq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq |2x - 1| \leq 11 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} -11 \leq 2x - 1 \leq -1 \\ \text{ou} \\ 1 \leq 2x - 1 \leq 11 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} -5 \leq x \leq 0 \\ \text{ou} \\ 1 \leq x \leq 6 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [-5; 0] \cup [1; 6]$$

Questão 4

Seja a equação em C

$$z^4 - z^2 + 1 = 0.$$

Qual dentre as alternativas abaixo é igual à soma de duas das raízes dessa equação?

a) $2\sqrt{3}$. b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. c) $+\frac{\sqrt{3}}{2}$. d) $-i$. e) $\frac{i}{2}$.

alternativa D

$z^4 - z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^4 - 2z^2 + 1 + z^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (z^2 - 1)^2 = -z^2 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} z^2 - 1 = zi \\ \vee \\ z^2 - 1 = -zi \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} z^2 - zi - 1 = 0 \\ \vee \\ z^2 + zi - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} z = \frac{i + \sqrt{3}}{2} \vee z = \frac{i - \sqrt{3}}{2} \\ \vee \\ z = \frac{-i + \sqrt{3}}{2} \vee z = \frac{-i - \sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

Logo as possíveis somas de duas das raízes são $0, i, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$ e $-i$.

Questão 5

Sejam A um conjunto com 8 elementos e B um conjunto tal que $A \cup B$ contenha 12 elementos. Então, o número de elementos de $P(B \backslash A) \cup P(\varnothing)$ é igual a

a) 8. b) 16. c) 20. d) 17. e) 9.

alternativa B

Temos $n(A \cup B) = n(A) + n(B \setminus A) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 12 = 8 + n(B \setminus A) \Leftrightarrow n(B \setminus A) = 4$. Como
$P(\varnothing) \subset P(B \setminus A)$,
$n(P(B \setminus A) \cup P(\varnothing)) = n(P(B \setminus A)) = 2^4 = 16$.

Questão 6

Sejam f e g duas funções definidas por

$$f(x) = (\sqrt{2})^{3\,sen\,x - 1} \text{ e } g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3\,sen^2 x - 1}, x \in \mathbb{R}.$$

A soma do valor mínimo de f com o valor mínimo de g é igual a

a) 0. b) $-\frac{1}{4}$. c) $\frac{1}{4}$. d) $\frac{1}{2}$. e) 1.

alternativa D

A função f é exponencial de base maior que 1, logo, para que f tenha valor mínimo, o expoente deve ser o menor possível, isto é, como $-1 \le sen\,x \le 1 \Leftrightarrow -3 \le 3\,sen\,x \le 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -4 \le 3\,sen\,x - 1 \le 2$, o valor mínimo é $\sqrt{2}^{-4} = \frac{1}{4}$.

A função g é exponencial de base menor que 1, logo, para que g tenha valor mínimo, o expoente deve ser o maior possível, isto é, como
$-1 \le sen\,x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le sen^2 x \le 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0 \le 3\,sen^2 x \le 3 \Leftrightarrow -1 \le 3\,sen^2 x - 1 \le 2$, o valor mínimo é $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Somando tais valores, obtemos $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Questão 7

Seja $f: \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ dada por

$$f(x) = \{y \in \mathbb{R}\ ;\ sen\ y < x\}.$$

Se A é tal que $f(x) = \mathbb{R}, \forall\, x \in A$, então

a) $A = [-1, 1]$.
b) $A = [a, \infty), \forall\, a > 1$.
c) $A = [a, \infty), \forall\, a \ge 1$.
d) $A = (-\infty, a], \forall\, a < -1$.
e) $A = (-\infty, a], \forall\, a \le -1$.

ver comentário

Seja $x \in A$. Como $f(x) = \{y \in R \mid sen\ y < x\} = R$, x deve ser tal que a inequação sen y < x seja verdadeira $\forall y \in R$, o que acontece se, e somente se, $x > 1$.
Assim, A pode ser qualquer subconjunto de $]1; \infty[$.

Questão 8

A divisão de um polinômio $f(x)$ por $(x - 1)(x - 2)$ tem resto $x + 1$. Se os restos das divisões de $f(x)$ por $x - 1$ e $x - 2$ são, respectivamente, os números a e b, então $a^2 + b^2$ vale

a) 13. b) 5. c) 2. d) 1. e) 0.

alternativa A

O resto da divisão de f(x) por $x - 1$ é $f(1) = a$ e o resto da divisão de f(x) por $x - 2$ é $f(2) = b$.
Sendo q(x) o quociente da divisão de f(x) por $(x - 1)(x - 2)$, temos que $f(x) = q(x)(x - 1)(x - 2) + x + 1$. Dessa forma, $a = f(1) = 2$ e $b = f(2) = 3$.
Logo $a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 13$.

Questão 9

Sabendo que a equação

$$x^3 - px^2 = q^m, p, q > 0, q \neq 1, m \in \mathbb{N},$$

possui três raízes reais positivas a, b e c, então

$$\log_q [abc\,(a^2 + b^2 + c^2)^{a+b+c}]$$

é igual a

a) $2m + p \log_q p$.
b) $m + 2p \log_q p$.
c) $m + p \log_q p$.
d) $m - p \log_q p$.
e) $m - 2p \log_q p$.

ver comentário

$x^3 - px^2 = q^m \Leftrightarrow x^3 - px^2 - q^m = 0$

Logo, pelas relações entre coeficientes e raízes, $ab + ac + bc = \frac{0}{1} = 0$. Porém, como a, b e c são reais positivos, $ab + ac + bc > 0$, contradição.
Portanto as condições dadas no problema são inconsistentes.
Observação: *retirando das condições do problema o fato de a, b e c serem reais positivos, teríamos, pelas relações entre coeficientes e raízes:*

$a + b + c = \frac{-(-p)}{1} = p$; $ab + ac + bc = \frac{0}{1} = 0$

e $abc = \frac{-(-q^m)}{1} = q^m$

Assim, $a^2 + b^2 + c^2 =$
$= (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) =$
$= p^2 - 2 \cdot 0 = p^2$ *e, como* $p, q > 0, q \neq 1$,
$\log_q [abc\,(a^2 + b^2 + c^2)^{a+b+c}] =$
$= \log_q [q^m \cdot (p^2)^p] =$
$= \log_q q^m + \log_q p^{2p} = m + 2p \cdot \log_q p$, *alternativa B.*

Questão 10

Dada a função quadrática

$$f(x) = x^2 \ln \frac{2}{3} + x \ln 6 - \frac{1}{4} \ln \frac{3}{2}$$

temos que

a) a equação $f(x) = 0$ não possui raízes reais.
b) a equação $f(x) = 0$ possui duas raízes reais distintas e o gráfico de f possui concavidade para cima.
c) a equação $f(x) = 0$ possui duas raízes reais iguais e o gráfico de f possui concavidade para baixo.
d) o valor máximo de f é $\frac{\ln 2 \ln 3}{\ln 3 - \ln 2}$.
e) o valor máximo de f é $2\frac{\ln 2 \ln 3}{\ln 3 - \ln 2}$.

alternativa D

A função dada é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ onde $a = \ln \frac{2}{3} = \ln 2 - \ln 3 < 0$, $b = \ln 6 = \ln 3 + \ln 2$ e $c = -\frac{1}{4} \ln \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}(\ln 3 - \ln 2)$. O discriminante Δ é dado por $\Delta = b^2 - 4ac = (\ln 3 + \ln 2)^2 - 4(\ln 2 - \ln 3)\left[-\frac{1}{4}(\ln 3 - \ln 2)\right] = (\ln 3 + \ln 2)^2 - (\ln 3 - \ln 2)^2 = 4 \ln 3 \ln 2 > 0$. Assim, como $\Delta > 0$ a equação $f(x) = 0$ possui duas raízes reais distintas e, como $a < 0$, o gráfico de f possui concavidade para baixo. A função f possui portanto um valor máximo, dado por $-\frac{\Delta}{4a} = \frac{-4 \ln 3 \ln 2}{4(\ln 2 - \ln 3)} = \frac{\ln 3 \ln 2}{\ln 3 - \ln 2}$.

Questão 11

Quantos anagramas com 4 letras distintas podemos formar com as 10 primeiras letras do alfabeto e que contenham 2 das letras a, b e c?

a) 1692.
b) 1572.
c) 1520.
d) 1512.
e) 1392.

alternativa D

Podemos escolher duas letras dentre a, b, c de $\binom{3}{2} = 3$ maneiras, e podemos escolher duas letras dentre as 7 restantes de $\binom{7}{2} = 21$ maneiras.
Como 4 letras distintas podem ser permutadas de $4! = 24$ maneiras, temos que o número de anagramas pedido é $3 \cdot 21 \cdot 24 = 1512$.

Questão 12

O seguinte trecho de artigo de um jornal local relata uma corrida beneficente de bicicletas: “Alguns segundos após a largada, Ralf tomou a liderança, seguido de perto por David e Rubinho, nesta ordem. Daí em diante, eles não mais deixaram as primeiras três posições e, em nenhum momento da corrida, estiveram lado a lado mais do que dois competidores. A liderança, no entanto, mudou de mãos nove vezes entre os três, enquanto que em mais oito ocasiões diferentes aqueles que corriam na segunda e terceira posições trocaram de lugar entre si. Após o término da corrida, Rubinho reclamou para nossos repórteres que David havia conduzido sua bicicleta de forma imprudente pouco antes da bandeirada de chegada. Desse modo, logo atrás de David, Rubinho não pôde ultrapassá-lo no final da corrida.”

Com base no trecho acima, você conclui que

a) David ganhou a corrida.
b) Ralf ganhou a corrida.
c) Rubinho chegou em terceiro lugar.
d) Ralf chegou em segundo lugar.
e) não é possível determinar a ordem de chegada, porque o trecho não apresenta uma descrição matematicamente correta.

alternativa E

Representemos Ralf por 1, David por 2 e Rubinho por 3. Em cada momento da corrida, a classificação é uma terna ordenada desses três números ou está ocorrendo uma inversão (troca de posições entre dois ciclistas).

Como a liderança mudou de mãos 9 vezes, e em mais 8 ocasiões aqueles que corriam na segunda e terceira posições trocaram de lugar entre si, houve no total 17 inversões.

Temos que, após um número ímpar de inversões, podemos obter somente as classificações (2; 1; 3), (1; 3; 2) e (3; 2; 1).

Rubinho chegou logo atrás de David, portanto a classificação final é (1; 2; 3) ou (2; 3; 1). Nenhuma das quais poderia ter sido obtida com um número ímpar de inversões.

Conseqüentemente, não é possível determinar a ordem de chegada, porque o trecho não apresenta uma descrição matematicamente correta.

Questão 13

Seja a matriz

$$\begin{bmatrix} \cos 25^o & \text{sen}\ 65^o \\ \text{sen}\ 120^o & \cos 390^o \end{bmatrix}.$$

O valor de seu determinante é

a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. d) 1. e) 0.

alternativa E

$$\begin{vmatrix} \cos 25^o & \text{sen}\ 65^o \\ \text{sen}\ 120^o & \cos 390^o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 25^o & \cos 25^o \\ \text{sen}\ 60^o & \cos 30^o \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos 25^o & \cos 25^o \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = 0$$

Questão 14

Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n tais que $AB = A$ e $BA = B$. Então, $[(A + B)^t]^2$ é igual a

a) $(A + B)^2$.
b) $2(A^t \cdot B^t)$.
c) $2(A^t + B^t)$.
d) $A^t + B^t$.
e) $A^t B^t$.

alternativa C

Como $A = AB$ e $B = BA$, temos

$A^2 = (AB)(AB) = A(BA)B = A \cdot B \cdot B =$
$= (AB)B = AB = A$

$B^2 = (BA)(BA) = B(AB)A = B \cdot A \cdot A =$
$= (BA)A = BA = B$

Assim,

$[(A + B)^t]^2 = [(A + B)^2]^t =$
$= (A^2 + AB + BA + B^2)^t = (A + A + B + B)^t =$
$= A^t + A^t + B^t + B^t = 2(A^t + B^t)$.

Questão 15

Seja A uma matriz real 2×2. Suponha que α e β sejam dois números distintos, e V e W duas matrizes reais 2×1 não-nulas, tais que

$$AV = \alpha V \quad \text{e} \quad AW = \beta W.$$

Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $aV + bW$ é igual à matriz nula 2×1, então $a + b$ vale

a) 0. b) 1. c) -1. d) $\frac{1}{2}$. e) $-\frac{1}{2}$.

alternativa A

Nas condições dadas,

$aV + bW = 0_{2\times 1} \Rightarrow A[aV + bW] = A \cdot 0_{2\times 1} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a(AV) + b(AW) = 0_{2\times 1} \Leftrightarrow a(\alpha V) + b(\beta W) =$
$= 0_{2\times 1} \Leftrightarrow a\alpha V + b\beta W = 0_{2\times 1}$.

Logo:

$$\begin{vmatrix} aV + bW = 0_{2\times 1} \\ a\alpha V + b\beta W = 0_{2\times 1} \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a\alpha V - a\beta V = 0_{2\times 1} \\ b\alpha W - b\beta W = 0_{2\times 1} \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a(\alpha - \beta)V = 0_{2\times 1} \\ b(\alpha - \beta)W = 0_{2\times 1} \end{vmatrix}$$

Assim, como α e β são números distintos e V e W são não nulas, $a = 0$ e $b = 0$ e portanto $a + b = 0$.

Questão 16

O triângulo ABC, inscrito numa circunferência, tem um lado medindo $\frac{20}{\pi}$ cm, cujo ângulo oposto é de 15^o. O comprimento da circunferência, em cm, é

a) $20\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})$. b) $400(2 + \sqrt{3})$.
c) $80(1 + \sqrt{3})$. d) $10(2\sqrt{3} + 5)$.
e) $20(1 + \sqrt{3})$.

alternativa A

Seja R o raio e, portanto, $2\pi R$ o comprimento da circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Pela lei dos senos temos:

$$2R = \frac{\frac{20}{\pi}}{\text{sen } 15^o} \Leftrightarrow 2\pi R = \frac{20}{\text{sen }(45^o - 30^o)} =$$

$$= \frac{20}{\text{sen } 45^o \cos 30^o - \text{sen } 30^o \cos 45^o} \Leftrightarrow 2\pi R =$$

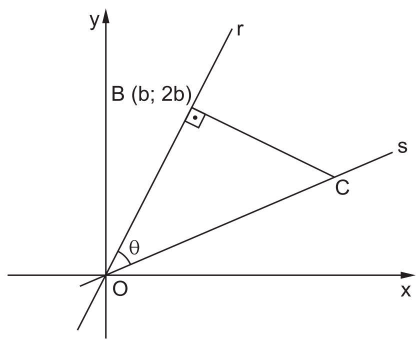
$$= \frac{20}{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}} = 20\sqrt{2}(1 + \sqrt{3}) \text{ cm}$$

Questão 17

Num sistema de coordenadas cartesianas, duas retas r e s, com coeficientes angulares 2 e $\frac{1}{2}$, respectivamente, se interceptam na origem 0. Se $B \in r$ e $C \in s$ são dois pontos no primeiro quadrante tais que o segmento $\overline{BC}$ é perpendicular a r e a área do triângulo OBC é igual a 12×10^{-1}, então a distância de B ao eixo das ordenadas vale

a) $\frac{8}{5}$. b) $\frac{4}{5}$. c) $\frac{2}{5}$. d) $\frac{1}{5}$. e) 1.

alternativa B



Seja θ o ângulo formado por r e s. Temos:

$$tg\theta = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

Assim, como ΔOBC é retângulo em B,

$$\text{área } \Delta OBC = \frac{BC \cdot OB}{2} = \frac{OB^2 \cdot tg\theta}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12 \cdot 10^{-1} = \frac{OB^2 \cdot \frac{3}{4}}{2} \Leftrightarrow OB^2 = \frac{16}{5}.$$

Como B está no 1º quadrante e pertence à reta r, que passa pela origem e tem coeficiente angular 2, temos que $B = (b; 2b)$, $b > 0$. Logo

$$OB^2 = (b - 0)^2 + (2b - 0)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{5} = 5b^2 \Leftrightarrow b = \frac{4}{5}.$$

Questão 18

Seja $k > 0$ tal que a equação $(x^2 - x) + k(y^2 - y) = 0$ define uma elipse com distância focal igual a 2. Se (p, q) são as coordenadas de um ponto da elipse, com $q^2 - q \neq 0$, então $\dfrac{p - p^2}{q^2 - q}$ é igual a

a) $2 + \sqrt{5}$.   b) $2 - \sqrt{5}$.   c) $2 + \sqrt{3}$.
d) $2 - \sqrt{3}$.   e) 2.

ver comentário

Temos $(x^2 - x) + k(y^2 - y) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + k\left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{k}{4} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + k\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{k+1}{4} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{k+1}{4}} + \dfrac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{k+1}{4k}} = 1.$

Lembrando que $a^2 = b^2 + c^2$, *temos:*

- *se o eixo maior é paralelo ao eixo x então, como* $k > 0$,
$\frac{k+1}{4} = \frac{k+1}{4k} + \left(\frac{2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow k^2 - 4k - 1 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow k = 2 + \sqrt{5}$;
- *se o eixo maior é paralelo ao eixo y então, como* $k > 0$,
$\frac{k+1}{4k} = \frac{k+1}{4} + \left(\frac{2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow k^2 + 4k - 1 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow k = -2 + \sqrt{5}$.

Assim, sendo $(p; q)$ *um ponto da elipse com* $q^2 - q \neq 0$, $(p^2 - p) + k(q^2 - q) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (p - p^2) = k(q^2 - q) \Leftrightarrow \frac{p - p^2}{q^2 - q} = k.$

Então $\frac{p - p^2}{q^2 - q} = 2 + \sqrt{5}$ *ou* $\frac{p - p^2}{q^2 - q} =$
$= -2 + \sqrt{5}$.

Questão 19

Considere a região do plano cartesiano xy definida pela desigualdade

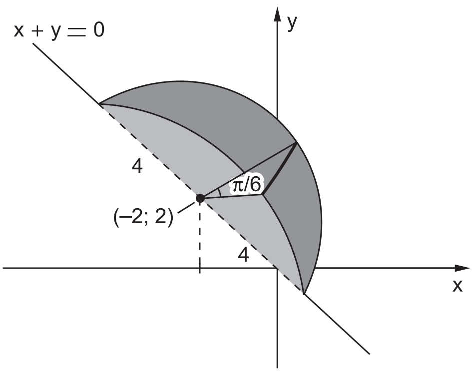
$$x^2 + 4x + y^2 - 4y - 8 \leq 0.$$

Quando esta região rodar um ângulo de $\frac{\pi}{6}$ radianos em torno da reta $x + y = 0$, ela irá gerar um sólido de superfície externa total com área igual a

a) $\frac{128}{3}\pi$.   b) $\frac{128}{4}\pi$.   c) $\frac{128}{5}\pi$.
d) $\frac{128}{6}\pi$.   e) $\frac{128}{7}\pi$.

alternativa A

Temos $x^2 + 4x + y^2 - 4y - 8 \leq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 \leq 16 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 4^2$, *desigualdade que corresponde a um círculo de centro* $(-2; 2)$ *e raio 4.*
Como a reta de equação $x + y = 0$ *contém o centro do círculo, quando este rodar um ângulo de* $\frac{\pi}{6}$ *radianos em torno da reta, o sólido formado será a união de duas cunhas esféricas de raio 4 com diâmetro sobre* $x + y = 0$ *e em semi-espaços opostos com relação ao plano xy.*
Cada cunha tem superfície igual à soma das áreas de um fuso com raio igual a 4 e ângulo central igual a $\frac{\pi}{6}$ *e de dois semicírculos de raio igual a 4.*
Logo a superfície externa total tem área $2\left(\frac{1}{12} \cdot 4\pi \cdot 4^2 + \pi \cdot 4^2\right) = \frac{128\pi}{3}$. *Na figura a seguir, representa-se uma das cunhas esféricas.*



Questão 20

Seja uma pirâmide regular de base hexagonal e altura 10 m. A que distância do vértice devemos cortá-la por um plano paralelo à base de forma que o volume da pirâmide obtida seja $\frac{1}{8}$ do volume da pirâmide original?

a) 2 m.   b) 4 m.   c) 5 m.   d) 6 m.   e) 8 m.

alternativa C

Sendo $\frac{1}{8}$ *a razão entre os volumes da pirâmide menor e da pirâmide maior, a razão entre suas alturas é* $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$.
Logo a distância entre o plano e o vértice é $\frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ *m.*

As questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, devem ser respondidas no caderno de soluções.

Questão 21

Seja a função f dada por
$f(x) = (\log_3 5) \cdot \log_5 8^{x-1} +$
$+ \log_3 4^{1+2x-x^2} - \log_3 2^{x(3x+1)}$.
Determine todos os valores de x que tornam f não-negativa.

Resposta

$f(x) = (\log_3 5) \cdot \log_5 8^{x-1} +$
$+ \log_3 4^{1+2x-x^2} - \log_3 2^{x(3x+1)} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x) = \log_3 (2^3)^{x-1} +$
$+ \log_3 (2^2)^{1+2x-x^2} - \log_3 2^{x(3x+1)} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x) = 3(x-1) \cdot \log_3 2 +$
$+ 2(1+2x-x^2) \cdot \log_3 2 - x(3x+1) \cdot \log_3 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x) = (-5x^2 + 6x - 1) \cdot \log_3 2$
Assim, como $\log_3 2 > 0$, $f(x) \ge 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (-5x^2 + 6x - 1) \cdot \log_3 2 \ge 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -5\left(x - \frac{1}{5}\right)(x-1) \ge 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{5}\right)(x-1) \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \le x \le 1.$

Portanto os valores de x *que tornam* f *não negativa são os pertencentes ao intervalo* $\left[\frac{1}{5}; 1\right]$.

Questão 22

Mostre que

$$\left(\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}\right)^4 > C_{8,\,4},$$

para quaisquer x e y reais positivos.
Obs.: $C_{n,\,p}$ denota a combinação de n elementos tomados p a p.

Resposta

Pela desigualdade das médias,

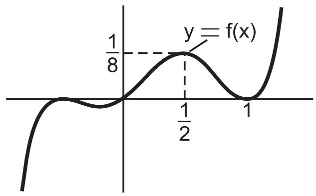
$$\frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}{2} \ge \sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \ge 2. \text{ Logo}$$

$$\left(\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}\right)^4 \ge (2+2)^4 = 256.$$

Sendo $C_{8,4} = \binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} = 70$, *concluímos que* $\left(\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}\right)^4 > C_{8,4}$.

Questão 23

Com base no gráfico da função polinomial $y = f(x)$ esboçado abaixo, responda qual é o resto da divisão de $f(x)$ por $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1)$.



Resposta

Sendo q(x) o quociente e r(x) = ax + b o resto da divisão de f(x) por $\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x-1)$, *temos que*

$$f(x) = q(x) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x-1) + ax + b.$$

Do gráfico, obtemos:

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} + b = \frac{1}{8} \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Logo o resto da divisão é $r(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$.

Questão 24

Sejam a e b dois números complexos não-nulos, tais que $a^2 + b^2 = 0$. Se $z, w \in \mathbb{C}$ satisfazem

$$\begin{cases} \bar{z}w + z\bar{w} = 6a \\ \bar{z}w - z\bar{w} = 8b \end{cases}$$

determine o valor de $|a|$ de forma que $|zw| = 1$.

Resposta

$\begin{cases} \bar{z}w + z\bar{w} = 6a \\ \bar{z}w - z\bar{w} = 8b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{z}w = 3a + 4b \\ z\bar{w} = 3a - 4b \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{z}w \cdot z\bar{w} = (3a + 4b)(3a - 4b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow zw \cdot \overline{zw} = (3a)^2 - (4b)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |zw|^2 = 9a^2 - 16b^2$

Logo, como $|zw| = 1$ *e* $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow b^2 = -a^2$, $1^2 = 9a^2 - 16(-a^2) \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{25} \Leftrightarrow |a| = \frac{1}{5}$.

Questão 25

1. Mostre que se uma matriz quadrada não-nula A satisfaz a equação

$$A^3 + 3A^2 + 2A = 0 \qquad (1)$$

então $(A + I)^3 = A + I$, em que I é a matriz identidade.

2. Sendo dado que

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

satisfaz a equação (1) acima, encontre duas matrizes não-nulas B e C tais que $B^3 + C^3 = B + C = A$. Para essas matrizes você garante que o sistema de equações

$$(B - C)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tem solução $(x, y) \neq (0, 0)$? Justifique.

Resposta

(1) Como as matrizes A e I comutam, temos

$A^3 + 3A^2 + 2A = 0 \Leftrightarrow A^3 + 3A^2 + 3A + I = A + I \Leftrightarrow (A + I)^3 = A + I.$

(2) Como $(-I)^3 = -I$ *e* $(A + I)^3 = A + I$, *basta tomarmos* $B = -I$ *e* $C = A + I$. *Assim,*

$B^3 + C^3 = B + C = -I + A + I = A.$

Logo $B - C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *cujo determinante é nulo. Portanto o sistema homogêneo admite solução* $(x; y) \neq (0; 0)$.

Observação: *podemos verificar que* ($B = -I$ *e* $C = A + I$) *e* ($B = A + I$ *e* $C = -I$) *são as únicas soluções com entradas reais de* $B^3 + C^3 = B + C = A$.

De fato, seja $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; *temos*

$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ *e* $B^3 + C^3 = B + C = A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (T^{-1}BT)^3 + (T^{-1}CT)^3 = (T^{-1}BT) + (T^{-1}CT) = (T^{-1}AT).$

Assim, sendo $T^{-1}BT = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *e*

$T^{-1}CT = \begin{pmatrix} -1 - a & -b \\ -c & -2 - d \end{pmatrix}$, *temos:*

$(T^{-1}BT)^3 =$

$= \begin{pmatrix} a^3 + bc(2a + d) & b(a^2 + ad + d^2 + bc) \\ c(a^2 + ad + d^2 + bc) & d^3 + bc(a + 2d) \end{pmatrix}$ *e*

$(T^{-1}CT)^3 =$

$= \begin{pmatrix} -(a + 1)^3 - bc(2a + d + 4) & -b((a + 1)^2 + (a + 1)(2 + d) + (2 + d)^2 + bc) \\ -c((a + 1)^2 + (a + 1)(2 + d) + (2 + d)^2 + bc) & -(2 + d)^3 - bc(a + 2d + 5) \end{pmatrix}$

Portanto $(T^{-1}BT)^3 + (T^{-1}CT)^3 = (T^{-1}AT) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 + 3a + 4bc = 0 \\ (4a + 5d + 7 = 0 \text{ ou } b = 0) \\ (4a + 5d + 7 = 0 \text{ ou } c = 0) \\ 6(d + 1)^2 + 5bc = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a = 0 \text{ ou } a = -1) \\ b = c = 0 \\ d = -1 \end{cases}$

Assim,

$T^{-1}BT = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A + I$ *ou*

$T^{-1}BT = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$

Questão 26

Sejam $n \geq 2$ números reais positivos $a_1, a_2, \ldots a_n$ que formam uma progressão aritmética de razão positiva. Considere $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ e responda, justificando: Para todo $n \geq 2$, qual é o maior entre os números $\left(\frac{A_n}{n} - a_n\right)^2$ e $\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - a_n^2$?

Resposta

Temos:

$\left(\frac{A_n}{n} - a_n\right)^2 - \left(\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - a_n^2\right) =$

$= \left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - 2a_n \cdot \frac{A_n}{n} + a_n^2 - \left(\frac{A_n}{n}\right)^2 + a_n^2 =$

$= 2a_n\left(a_n - \dfrac{A_n}{n}\right)$ (*)

Como $n \geq 2$ *e a razão da PA é positiva,* $\dfrac{A_n}{n} =$

$= \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} < \dfrac{a_n + a_n + \ldots + a_n}{n} = a_n$.

Assim, $a_n - \dfrac{A_n}{n} > 0$, *e como* $a_n > 0$, *a expressão (*) é positiva, ou seja, o maior dos números é* $\left(\dfrac{A_n}{n} - a_n\right)^2$.

Questão 27

Considere n pontos distintos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sobre uma circunferência de raio unitário, de forma que os comprimentos dos arcos $\overset{\frown}{A_1 A_2}$, $\overset{\frown}{A_2 A_3}$, ..., $\overset{\frown}{A_{n-1} A_n}$ formam uma progressão geométrica de termo inicial π e razão $\dfrac{1}{2}$.

Para que valores de $n \in \mathbb{N}$ teremos o comprimento do arco $\overset{\frown}{A_n A_1}$ menor que $\dfrac{1}{512}$ do comprimento da circunferência?

Obs.: Para todo arco $\overset{\frown}{A_k A_\ell}$, o comprimento considerado é o do arco que une o ponto A_k ao ponto A_ℓ no sentido anti-horário.

Resposta

Como o raio é unitário e os arcos $\overset{\frown}{A_1A_2}$; $\overset{\frown}{A_2A_3}$; ...; $\overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$ *formam uma progressão geométrica de primeiro termo* π *e razão* $\dfrac{1}{2}$, *temos que o arco* $\overset{\frown}{A_1A_n}$ *mede*

$$\frac{\pi\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 2\pi\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right),$$

assim o arco $\overset{\frown}{A_nA_1}$ *mede*

$$2\pi \cdot 1 - 2\pi\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = 2\pi\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Portanto, para que $\overset{\frown}{A_nA_1}$ *seja menor que* $\dfrac{1}{512}$ *do comprimento da circunferência, deve-se ter*

$$2\pi\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{1}{512} \cdot 2\pi \cdot 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{9} \Leftrightarrow n - 1 > 9 \Leftrightarrow n > 10,$$ *ou seja,* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $n \geq 11$.

Questão 28

Seja S a área total da superfície de um cone circular reto de altura h, e seja m a razão entre as áreas lateral e da base desse cone. Obtenha uma expressão que forneça h em função apenas de S e m.

Resposta

Sendo r *o raio da base e* g *a geratriz do cone, temos* $\dfrac{S_{lateral}}{S_{base}} = \dfrac{\pi rg}{\pi r^2} = \dfrac{g}{r} = m$ *e*

$S = S_{lateral} + S_{base} = \pi r(g + r)$.

Assim, $g = \dfrac{S}{\pi r} - r = mr \Rightarrow r^2 = \dfrac{S}{\pi(m+1)}$ *e*

$h^2 = g^2 - r^2 = m^2r^2 - r^2 = r^2(m^2 - 1) =$

$= \dfrac{S}{\pi(m+1)} \cdot (m^2 - 1) \Leftrightarrow h = \sqrt{\dfrac{S(m-1)}{\pi}}$.

Questão 29

Considere o seguinte raciocínio de cunho cartesiano: "Se a circunferência de centro $C = (h, 0)$ e raio r intercepta a curva $y = +\sqrt{x}$, $x > 0$, no ponto $A = (a, \sqrt{a})$ de forma que o segmento $\overline{AC}$ seja perpendicular à reta tangente à curva em A, então $x = a$ é raiz dupla da equação em x que se obtém da intersecção da curva com a circunferência."

Use este raciocínio para mostrar que o coeficiente angular dessa reta tangente em A é $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

Resposta

Seja m *o coeficiente angular da reta* t *tangente à curva* $y = \sqrt{x}$ *no ponto* $A = (a; \sqrt{a})$, $a > 0$. *Seja a circunferência* $(x - h)^2 + (y - 0)^2 = r^2$ *de centro* $C = (h; 0)$ *e raio* r *que passa por A e tal que* $\overleftrightarrow{AC}$ *seja perpendicular a* t. *A intersecção da curva e da circunferência é a solução do sistema:*

$$\begin{cases} (x-h)^2 + (y-0)^2 = r^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x - h)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2 = r^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + (1 - 2h)x + h^2 - r^2 = 0.$

Pelo fato enunciado, $x = a$ é raiz dupla dessa equação, ou seja, $a = -\frac{(1-2h)}{2} \Leftrightarrow h = a + \frac{1}{2}$.

Como $\overleftrightarrow{AC}$ *é perpendicular a* t, *temos:*

$$m = -\frac{1}{\frac{\sqrt{a} - 0}{a - h}} = \frac{h - a}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Questão 30

Se x, y e z são os ângulos internos de um triângulo ABC e $sen\ x = \frac{sen\ y + sen\ z}{cos\ y + cos\ z}$, prove que o triângulo ABC é retângulo.

Resposta

$$sen\ x = \frac{sen\ y + sen\ z}{cos\ y + cos\ z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sen\ x = \frac{2\ sen\left(\frac{y+z}{2}\right) cos\left(\frac{y-z}{2}\right)}{2\ cos\left(\frac{y+z}{2}\right) cos\left(\frac{y-z}{2}\right)} \quad (*)$$

Como x, y *e* z *são ângulos internos de um triângulo,* $x + y + z = \pi \Leftrightarrow \frac{y+z}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$,

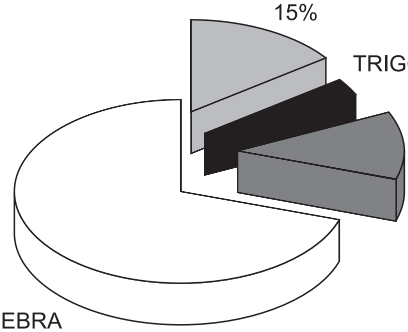
$0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$ *e* $\frac{-\pi}{2} < \frac{y-z}{2} < \frac{\pi}{2}$. *Assim,*

$$(*) \Leftrightarrow sen\ x = \frac{sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)}{cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot sen\frac{x}{2} \cdot cos\frac{x}{2} = \frac{cos\frac{x}{2}}{sen\frac{x}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\ sen^2\frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow 1 - 2\ sen^2\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow cos\ x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$, *ou seja, o triângulo ABC é retângulo.*



Matemática – Maior preferência por Álgebra

Este ano, a prova de Matemática do ITA apresentou novo formato, com 20 testes e 10 questões dissertativas. O acréscimo de 5 questões não aumentou exageradamente a dificuldade da prova, apenas fez com que questões bastante simples (13 e 20, por exemplo) aparecessem junto com questões de alta complexidade (12, 15 e 30). Por outro lado, também não tornou a prova mais equilibrada, mantendo a preferência pela Álgebra.

O novo formato permitiu ainda que examinadores pedissem demonstrações (questões 22 e 30), algo impossível no formato antigo.

Finalmente, podemos destacar a originalidade do teste 12 e lamentar os problemas nos enunciados das questões 7, 9 e 18 (veja os detalhes na resolução da prova), que certamente causaram confusão para os candidatos.